

# 連分数と可積分系

|             |              |                      |
|-------------|--------------|----------------------|
| 大阪大学基礎工学研究科 | 岩崎 雅史        | (Masashi Iwasaki)    |
| 三菱総合研究所     | 向平 敦史        | (Atsushi Mukaihira)  |
|             | (2001年4月より)  | 京都大学情報学研究科           |
| 大阪大学基礎工学研究科 | 中村 佳正        | (Yoshimasa Nakamura) |
|             | (2001年4月より)  | 京都大学情報学研究科           |
| 大阪大学基礎工学研究科 | 辻本 諭         | (Satoshi Tsujimoto)  |
|             | (2001年11月より) | 京都大学情報学研究科           |

概要： 可積分系の応用解析の最前線 (文献 [10], [11], [25]) を解説する．まず，qd アルゴリズムを discrete-time semi-infinite Toda 方程式とみなし，その空間変数に関するシフト ( $k \Rightarrow k + 1$ ) により  $O(m^2)$  の計算量で Class N 関数の Chebyshev 連分数展開が計算できることをみる．同様に，discrete Schur flow の空間シフトにより Class C 関数の Perron 連分数展開が可能である．これらの可積分系はそれぞれ実軸上，単位円周上の直交多項式の測度の 1 パラメータ変形方程式の可積分差分として導かれる．symmetric な測度に限れば，変形方程式は semi-infinite Lotka-Volterra 系，semi-discrete modified KdV 方程式に帰着する．また，qd アルゴリズム，full-discrete modified KdV 方程式，discrete-time Lotka-Volterra 系の時間発展 ( $n \Rightarrow n + 1$ ) は，それぞれ，行列の固有値，多項式の零点，行列の特異値の計算機能をもつことを明らかにする．

## 1 アルゴリズムと可積分系 - 序 -

近年，多くの数値計算および最適化アルゴリズムが可積分系と関連づけて理解されるようになった [17](第 5 章)．そのようなアルゴリズムは以下の四つのクラスに分類される．

- 線形化可能な勾配系 (e.g., Karmarkar の力学系 [12], ベキ乗法 [16])
- 行列の固有値保存変形 (e.g., QR アルゴリズム [23], Jacobi 法 [13])
- 連分数展開アルゴリズム (e.g., qd アルゴリズム [19],  $\epsilon$ -アルゴリズム [18])
- 加法公式型アルゴリズム (e.g., 算術幾何平均のアルゴリズム [3], 算術調和平均のアルゴリズム [15])

本稿は qd アルゴリズムを中心とした連分数展開に関わる可積分系の解説である．数列の収束を加速する  $\epsilon$ -アルゴリズムの話題については文献 [17](第 6 章) を参照されたい．§2 では，基礎事項と

して qd アルゴリズム (discrete-time semi-infinite Toda 方程式) とその Class N 関数の Chebyshev 連分数への応用について述べる．最近, Mukaihira-Nakamura [10] は単位円周上の直交多項式を定める測度の 1 パラメータ変形から Schur flow (semi-discrete complex modified KdV 方程式) を導き, さらに, その可積分差分 (広田差分) として discrete Schur flow を得た．§3 では discrete Schur flow による Class C 関数の Perron 連分数の計算について述べる．これらは可積分系の空間変数方向への計算 ( $k \Rightarrow k+1$ ) である．

一方, 時間変数方向への計算 ( $n \Rightarrow n+1$ ) の例として, §2 では, qd アルゴリズムによる多項式の零点の計算, 3 重対角行列の固有値計算, §3 では, full-discrete modified KdV 方程式による多項式の零点の計算 [11] について述べる．さらに, §4 では [25] に従って, discrete-time Lotka-Volterra 系の時間変数方向への計算によって行列の特異値計算が可能であることを明らかにする．証明において discrete-time Lotka-Volterra 系のタウ関数の漸近挙動と Lax 形式が本質的である．

## 2 Chebyshev 連分数と Toda 方程式

$w = f(z)$  を Class N 関数とする．すなわち,  $f$  は上半面  $\text{Im } z > 0$  から上半面  $\text{Im } w \geq 0$  への解析関数である．Nevanlinna 補間問題とは与えられたデータ  $z_j, w_j$  に対して  $w_j = f(z_j)$  なる Class N 関数を見つける問題である．ある条件のもとで解は Nevanlinna の積分公式 [1]

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(x)}{z-x} \quad (1)$$

をもつ． $\sigma(x)$  は適当な性質をもつ非減少関数である．さらに, モーメント列

$$s_k \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^k d\sigma(x)$$

を導入すれば, Class N 関数  $f$  のべき級数展開

$$f(z) = s_0 z^{-1} + s_1 z^{-2} + s_2 z^{-3} + \dots \quad (2)$$

を得る．関連する問題に Hamburger モーメント問題がある．これは, 与えられたモーメント列から  $s_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k d\sigma(x)$  なる  $\sigma(x)$  を構成する問題である．

本稿で考えるのは与えられたモーメント列から Class N 関数の Chebyshev 連分数を具体的に計算する問題である．Class N 関数のべき級数  $f(z) = s_0 z^{-1} + s_1 z^{-2} + s_2 z^{-3} + \dots$  は以下の意味で

$$f(z) = \frac{s_0}{z - q_1^{(0)} - \frac{q_1^{(0)} e_1^{(0)}}{z - q_2^{(0)} - e_1^{(0)} - \frac{q_2^{(0)} e_2^{(0)}}{z - q_3^{(0)} - e_2^{(0)} - \dots}} \quad (3)$$

が可能である．すなわち，この連分数の  $m$  次の打ち切り ( $m$  次の有理関数) を  $z^{-1}$  についてべき級数展開したものは， $s_{2m-1}z^{-2m}$  の項に至るまで，もとのべき級数  $s_0z^{-1} + s_1z^{-2} + s_2z^{-3} + \dots$  に一致する．すなわち，Chebyshev 連分数は  $f(z)$  の Padé 近似を与える．例えば，[6] 参照．Chebyshev 連分数の係数は Hankel 行列式の比によって

$$q_k^{(0)} = \frac{\tau_{k-1}^{(0)} \tau_k^{(1)}}{\tau_{k-1}^{(1)} \tau_k^{(0)}}, \quad e_k^{(0)} = \frac{\tau_{k-1}^{(1)} \tau_{k+1}^{(0)}}{\tau_k^{(0)} \tau_k^{(1)}}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\tau_0^{(n)} \equiv 1, \quad \tau_k^{(n)} \equiv \begin{vmatrix} s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{n+k-1} \\ s_{n+1} & s_{n+2} & \cdots & s_{n+k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n+k-1} & s_{n+k} & \cdots & s_{n+2k-2} \end{vmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4)$$

と表される． $s_0, \dots, s_{2m-1}$  を与えられたモーメント列とする．係数のうち簡単なものは

$$q_1^{(0)} = \frac{s_1}{s_0}, \quad e_1^{(0)} = \frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}}{s_0 s_1}, \quad q_2^{(0)} = \frac{s_0 \begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{vmatrix}}{s_1 \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}}, \dots$$

と書けるが， $q_m^{(0)}, e_{m-1}^{(0)}$  には  $m$  次行列式  $\tau_m^{(0)}, \tau_m^{(1)}$  が現れる．

行列式の直接計算による計算量の増大を避けるため，新しい添え字  $n = 0, 1, \dots$  をもつ変数  $q_k^{(n)}$ ， $e_k^{(n)}$  を漸化式

$$e_{k+1}^{(n)} = e_k^{(n+1)} + q_{k+1}^{(n+1)} - q_{k+1}^{(n)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$q_{k+1}^{(n)} = \frac{q_k^{(n+1)} e_k^{(n+1)}}{e_k^{(n)}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5)$$

により導入しよう．ただし，初期値を

$$e_0^{(n)} = 0, \quad q_1^{(n)} = \frac{s_{n+1}}{s_n}, \quad n = 0, \dots, 2m-2 \quad (6)$$



を定める．qd table は以下の通り．

$$\begin{array}{cccc}
& -1 & & \\
0 & & -9 & \\
& -10 & & 11 \\
0 & & 99/10 & & 1/11 \\
& -1/10 & & 131/110 & & 21/11 \\
0 & & -1179/10 & & 210/1441 \\
& -118 & & 15620/131 \\
0 & & 7029/59 \\
& 67/59
\end{array}$$

この結果，Chebyshev 連分数が求められるが，Chebyshev 連分数は最初の有理関数を回復することは明らか．

$$\frac{1}{z+1} - \frac{(-9) \cdot (-1)}{z-11+9} - \frac{11 \cdot 1/11}{z-21/11-1/11} = \frac{z^2 - 4z + 3}{z^3 - 3z^2 - 10z + 21}$$

もし6項より多くのデータを用いても  $\tau_4^{(0)} = 0$ ,  $e_3^{(0)} = 0$  となり Chebyshev 連分数は変わらない．6項より少なければ，最初の有理関数を近似する小さな次数の有理関数を得ることになる．qd アルゴリズムによる Chebyshev 連分数計算の Laplace 変換への応用が [14] にある．

つぎに，qd アルゴリズムから semi-infinite Toda 方程式へのルート ([8],[14]) について簡単に述べよう．従属変数  $J_k(n)$ ,  $V_k(n)$  を

$$J_k^{(n)} \equiv \frac{1 - q_k^{(n)}}{\varepsilon}, \quad V_k^{(n)} \equiv \frac{e_k^{(n)}}{\varepsilon^2} \tag{7}$$

により導入する．ここに， $\varepsilon$  は適当な定数．qd アルゴリズムの漸化式は

$$\begin{aligned}
\frac{J_k^{(n+1)} - J_k^{(n)}}{\varepsilon} &= V_{k-1}^{(n+1)} - V_k^{(n)}, \\
\frac{V_k^{(n+1)} - V_k^{(n)}}{\varepsilon} &= V_k^{(n+1)} J_k^{(n+1)} - V_k^{(n)} J_{k+1}^{(n)}
\end{aligned}$$

と書ける． $t = n\varepsilon$  において連続極限  $\varepsilon \rightarrow 0$  をとり  $J_k^{(n)} = J_k(n\varepsilon) \rightarrow J_k(t)$ ,  $V_k^{(n)} = V_k(n\varepsilon) \rightarrow V_k(t)$  と書くと，漸化式は semi-infinite Toda 方程式

$$\frac{dJ_k}{dt} = V_{k-1} - V_k, \quad \frac{dV_k}{dt} = V_k(J_k - J_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots \tag{8}$$

に移行する．ゆえに qd アルゴリズムは discrete-time Toda 方程式とみなせることになる．qd アルゴリズムの変数 (添え字)  $k$ ,  $n$  はそれぞれ Toda 方程式の空間，時間変数に対応する．従って，上で

述べた qd アルゴリズムによる Chebyshev 連分数の計算は，Toda 方程式の空間シフト  $k \Rightarrow k + 1$  による連分数計算とも言うことができよう．

なお，semi-infinite Toda 方程式は，実軸上の直交多項式を定める測度  $d\sigma(x)$  の 1 パラメータ変形  $d\sigma(x, t) = \exp(-xt)d\sigma(x, 0)$  が引き起こす直交多項式の係数の変形ともみることができる ([9], [2])．測度  $\sigma(x)$  が symmetric 条件  $d\sigma(x) = d\sigma(-x)$  を満たすとき，モーメントについて  $s_{2j-1} = 0$  となる．Hermite 多項式などがこの場合に含まれる．symmetric 条件を満たす (高次の) 1 パラメータ変形  $d\sigma(x, t) = \exp(-x^2t)d\sigma(x, 0)$  は，直交多項式の係数について semi-infinite Lotka-Volterra 系

$$\frac{du_k}{dt} = u_k(u_{k+1} - u_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad u_0 = 0$$

を変形方程式とする可積分変形を引き起こす．この Lotka-Volterra 系に対応する Chebyshev 連分数は

$$f(z) = \frac{s_0}{z - \frac{u_1^{(0)}}{z - \frac{u_2^{(0)}}{z - \dots}}}$$

である．

さて，qd アルゴリズムの時間発展  $n \Rightarrow n + 1$  の応用について概説する．拡張された qd table [5]

$$\begin{array}{ccccccc} & & q_1^{(0)} & q_2^{(-1)} & \dots & q_m^{(1-m)} & \\ & e_0^{(1)} & e_1^{(0)} & e_2^{(-1)} & \dots & & \\ n & q_1^{(1)} & q_2^{(0)} & \dots & q_m^{(2-m)} & & \\ \downarrow & e_0^{(2)} & e_1^{(1)} & e_2^{(0)} & \dots & & \\ n+1 & q_1^{(2)} & q_2^{(1)} & \dots & q_m^{(3-m)} & & \\ & e_0^{(3)} & e_1^{(2)} & e_2^{(1)} & \dots & & \\ & q_1^{(3)} & q_2^{(2)} & \dots & q_m^{(4-m)} & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{array}$$

を用意する．時間発展  $n \Rightarrow n + 1$  に従って上から下に計算する．もし，初期値と境界値を零でない定数  $b_k$  を用いて

$$\begin{aligned} q_1^{(0)} &= -\frac{b_1}{b_0}, \quad q_2^{(-1)} = 0, \quad \dots \quad q_{m-1}^{(2-m)} = 0, \quad q_m^{(n-m)} = 0, \\ e_0^{(n)} &= 0, \quad e_1^{(0)} = \frac{b_2}{b_1}, \quad e_2^{(-1)} = \frac{b_3}{b_2}, \quad \dots \quad e_{m-1}^{(2-m)} = \frac{b_m}{b_{m-1}}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$





とべき級数展開される．与えられたモーメント  $s_k^0$  から  $\sigma(\theta)$  を構成する問題はこの場合三角モーメント問題という．一方，単位円盤から単位円盤への解析関数の全体を Class S という．Class S の関数はすべて有理変換によって Class C の関数に移る [1]．そこでここでは Class C 関数に限定してその連分数展開を考察することにする．

Class C 関数は Padé 近似の意味で Perron 連分数展開

$$f(z) = \frac{s_0^0}{1 - \frac{2\overline{\alpha_1^0}z}{1 + \overline{\alpha_1^0}z + \frac{\overline{\alpha_2^0}(1 - |\alpha_1^0|^2)z}{\alpha_1^0}} \frac{\overline{\alpha_3^0}(1 - |\alpha_2^0|^2)z}{1 - \frac{\overline{\alpha_2^0}}{\alpha_1^0}z + \frac{\overline{\alpha_3^0}}{\alpha_2^0}} \dots} \quad (14)$$

をもつ．ここに，係数  $\alpha_k^0$  は Schur パラメータと呼ばれ，モーメントのなす Toeplitz 行列式の比

$$\alpha_k^0 \equiv \frac{\widehat{\tau}_k^0}{\tau_k^0},$$

$$\tau_0^n \equiv 1, \quad \tau_k^n \equiv \begin{vmatrix} s_0^n & s_1^n & \cdots & s_{k-1}^n \\ s_{-1}^n & s_0^n & \cdots & s_{k-2}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1-k}^n & s_{2-k}^n & \cdots & s_0^n \end{vmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$\widehat{\tau}_0^n \equiv 1, \quad \widehat{\tau}_k^n \equiv \begin{vmatrix} s_1^n & s_2^n & \cdots & s_k^n \\ s_0^n & s_1^n & \cdots & s_{k-1}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{2-k}^n & s_{3-k}^n & \cdots & s_1^n \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

で表される．添え字  $n = 1, 2, \dots$  は Perron 連分数を計算するアルゴリズムの定式化の際に必要となる．

Mukaihira-Nakamura [10] は discrete-time complex modified KdV 方程式 (discrete Schur flow) によって Perron 連分数に現れる Schur パラメータが多項式時間で計算できることを見いだした． $s_0^0, \dots, s_{-m}^0$  を与えられたモーメントとする．Perron 連分数は discrete Schur flow の漸化式

$$\alpha_k^{n+1} - \alpha_k^n = \frac{\gamma_k^{n+1}}{\gamma_k^n} (1 - |\alpha_k^n|^2) (\alpha_{k-1}^{n+1} - \alpha_{k+1}^n),$$

$$\frac{\gamma_k^n}{\gamma_{k+1}^n} = 1 - |\alpha_k^n|^2,$$

$$s_j^{n+1} = s_{j-1}^n + s_{j+1}^n, \quad s_j^0 = \overline{s_{-j}^0} \quad (16)$$

によって初期値

$$\alpha_0^n = 1, \quad \alpha_1^n = \frac{s_1^n}{s_0^n}, \quad \gamma_1^n = \frac{1}{s_0^n}, \quad n = 0, 1, \dots, m-1 \quad (17)$$

から逐次的に定められる． $\gamma_k^n$  は拡張された Schur パラメータ  $\alpha_k^n$  の漸化式を閉じた形に書くために導入された補助変数である．以下の “discrete Schur flow table” において左端の 2 列を初期値とし  $k \Rightarrow k+1$  なる方向に計算は遂行される．

|          | $k = 0$      | $k = 1$          | $k = 2$      | $k = 3$      | $\dots$          | $k = m$      |
|----------|--------------|------------------|--------------|--------------|------------------|--------------|
| $n = 0$  |              | $\alpha_1^0$     | $\alpha_2^0$ | $\alpha_3^0$ | $\dots$          | $\alpha_m^0$ |
|          |              | $\gamma_1^0$     | $\gamma_2^0$ | $\gamma_3^0$ | $\dots$          | $\gamma_m^0$ |
| $n = 1$  | $\alpha_0^1$ | $\alpha_1^1$     | $\alpha_2^1$ | $\dots$      | $\alpha_{m-1}^1$ |              |
|          |              | $\gamma_1^1$     | $\gamma_2^1$ | $\dots$      | $\gamma_{m-1}^1$ |              |
| $n = 2$  | $\alpha_0^2$ | $\alpha_1^2$     | $\dots$      |              |                  |              |
|          |              | $\gamma_1^2$     |              |              |                  |              |
| $n = 3$  | $\alpha_0^3$ | $\vdots$         | $\dots$      |              |                  |              |
| $\vdots$ | $\vdots$     | $\alpha_1^{m-1}$ |              |              |                  |              |
|          |              | $\gamma_1^{m-1}$ |              |              |                  |              |
| $n = m$  | $\alpha_0^m$ |                  |              |              |                  |              |

$k \quad \implies \quad k+1$

この結果  $\alpha_k^0$  は  $s_0^0 + 2s_{-1}^0 z + \dots + 2s_{-m}^0 z^m$  の Perron 連分数展開の係数を与える．Chebyshev 連分数計算の qd アルゴリズムと同様に， $O(m^2)$  回の乗除算で全ての  $\alpha_k^0, \gamma_k^0, k = 1, \dots, m$ , が計算される．

例を与える． $m = 4, i \equiv \sqrt{-1}$  とする．4 次の複素有理関数のべき級数展開

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{12 + (3 + 9i)z + 10iz^2 + (-3 + 9i)z^3 - 12z^4}{12 + (15 - 3i)z + 16z^2 + (15 + 3i)z^3 + 12z^4} \\ &= 1 + (-1 + i)z + \frac{-1 - 2i}{3}z^2 + \frac{5 - i}{12}z^3 + \frac{-40 + 7i}{72}z^4 + \dots \end{aligned}$$

の最初の 5 項から discrete Schur flow の初期値を

$$\begin{aligned} \alpha_1^0 &= -\frac{1+i}{2}, \quad \alpha_1^1 = -\frac{5+2i}{6}, \quad \alpha_1^2 = -\frac{31+11i}{40}, \\ \alpha_1^3 &= -\frac{296+89i}{372}, \quad \gamma_1^0 = 1, \quad \gamma_1^1 = -1, \quad \gamma_1^2 = \frac{3}{5}, \quad \gamma_1^3 = -\frac{12}{31} \end{aligned}$$

と設定する．漸化式の計算で  $\alpha_2^0 = (1+i)/3, \alpha_3^0 = -(1+i)/4, \alpha_4^0 = -i$  となるから，Perron 連

分数

$$1 + \frac{1}{1 - \frac{1-i}{2}z - \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}z}{1 + \frac{2}{3}z - \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{9}z}{1 + \frac{3}{4}z - \frac{\frac{1-i}{4} \cdot \frac{7}{8}z}{1 + \frac{4}{1-i}z}}} = f(z)$$

がもとの複素有理関数を回復することがわかる .

つぎに discrete Schur flow , Schur flow および modified KdV (mKdV) 方程式の相互関係について説明する . まず , 拡張された Schur パラメータは  $\alpha_k^n = \widehat{\tau}_k^n / \tau_k^n$  と表されることに注意する .  $t = n\varepsilon$  とし連続極限  $\varepsilon \rightarrow 0$  をとれば

$$\frac{\gamma_k^{n+1}}{\gamma_k^n} = \frac{\gamma_k(n\varepsilon + \varepsilon)}{\gamma_k(n\varepsilon)} \rightarrow 1, \quad \alpha_k^n = \alpha_k(n\varepsilon) \rightarrow \alpha_k(t)$$

となることから , Schur flow

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = (1 - |\alpha_k|^2)(\alpha_{k-1} - \alpha_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (18)$$

を得る . Schur flow は [10] において単位円周上の直交多項式 (Szegő 多項式) を定める測度の 1 パラメータ変形  $d\sigma(\theta, t) = \exp\{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})t\}d\sigma(\theta, 0)$  により誘導された . discrete Schur flow は Schur flow から可積分差分 (広田差分) の手法により導出された [10] . symmetric な測度の場合 ,  $d\sigma(\theta) = d\sigma(-\theta)$  , モーメントと Schur パラメータはそれぞれ  $s_j^0 = s_{-j}^0$  ,  $\alpha_k = \overline{\alpha_k}$  を満たす . この結果 , Schur flow は Ablowitz-Ladik による semi-discrete mKdV 方程式

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = (1 - \alpha_k^2)(\alpha_{k-1} - \alpha_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots$$

に帰着する . 高次の 1 パラメータ変形  $d\sigma(\theta, t_j) = \exp\{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^j t_j\}d\sigma(\theta, 0)$  による Schur flow hierarchy,  $j = 1, 2, \dots$  を考えれば , general な測度と symmetric な測度の場合の変形方程式の違いはより顕著となる . なお , symmetric な場合の  $t_2$ -flow は unitary matrix model で知られている . また , discrete Schur flow における変数 (添え字)  $k, n$  はそれぞれ semi-discrete mKdV 方程式の空間 , 時間変数に対応する . 従って , discrete Schur flow による Perron 連分数の計算は空間シフト  $k \Rightarrow k+1$  を利用したものともみることができる .

さて , [11] に従って discrete Schur flow の時間発展の応用を論じよう . まず , 漸化式を拡張して正と負の両方の添え字について full-discrete mKdV 方程式

$$\alpha_k^{n+1} - \alpha_k^n = \frac{\gamma_{\pm k}^{n+1}}{\gamma_{\pm k}^n} (1 - \alpha_k^n \alpha_{-k}^n) (\alpha_{k\mp 1}^{n+1} - \alpha_{k\pm 1}^n), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$\frac{\gamma_k^n}{\gamma_{k+1}^n} = 1 - \alpha_k^n \alpha_{-k}^n, \quad k = 1, 2, \dots \quad (19)$$

を準備する．ここではモーメントは symmetric 条件  $s_j = s_{-j}$  を満たすものとする．解は

$$\begin{aligned} \alpha_k^n &= \frac{\widehat{\tau}_k^n}{\tau_k^n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \gamma_k^n = \frac{\tau_{k-1}^n}{\tau_k^n}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \tau_0^n &= 1, \quad \tau_k^n = |s_{\pm i \mp j}|_{1 \leq i, j \leq \pm k} = \begin{vmatrix} s_0^n & s_{\mp 1}^n & \cdots & s_{\pm 1-k}^n \\ s_{\pm 1}^n & s_0^n & \cdots & s_{\pm 2-k}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{k \mp 1}^n & s_{k \mp 2}^n & \cdots & s_0^n \end{vmatrix}, \\ \widehat{\tau}_0^n &= 1, \quad \widehat{\tau}_k^n = |s_{\pm i \mp j \pm 1}|_{1 \leq i, j \leq \pm k} = \begin{vmatrix} s_{\pm 1}^n & s_0^n & \cdots & s_{\pm 2-k}^n \\ s_{\pm 2}^n & s_{\pm 1}^n & \cdots & s_{\pm 3-k}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_k^n & s_{k \mp 1}^n & \cdots & s_{\pm 1}^n \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

と表される．さらに，“progressive discrete Schur flow table”

$$\begin{array}{cccccccc} n=0 & \alpha_{-m}^0 & \alpha_{1-m}^0 & \cdots & \alpha_{-1}^0 & \alpha_0^0 & \alpha_1^0 & \cdots & \alpha_{m-1}^0 & \alpha_m^0 \\ n=1 & \alpha_{-m}^1 & \alpha_{1-m}^1 & \cdots & \alpha_{-1}^1 & \alpha_0^1 & \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_{m-1}^1 & \alpha_m^1 \\ n=2 & \alpha_{-m}^2 & \alpha_{1-m}^2 & \cdots & \alpha_{-1}^2 & \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_{m-1}^2 & \alpha_m^2 \\ n=3 & \alpha_{-m}^3 & \alpha_{1-m}^3 & \cdots & \alpha_{-1}^3 & \alpha_0^3 & \alpha_1^3 & \cdots & \alpha_{m-1}^3 & \alpha_m^3 \\ n=4 & \alpha_{-m}^4 & \alpha_{1-m}^4 & \cdots & \alpha_{-1}^4 & \alpha_0^4 & \alpha_1^4 & \cdots & \alpha_{m-1}^4 & \alpha_m^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}$$

を導入する．初期値と境界値が

$$\begin{aligned} \alpha_j^0 &= (-1)^j \frac{c_j}{c_0}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ \alpha_{-m}^0 &= (-1)^m \frac{c_0}{c_m}, \quad \alpha_j^0 = 0, \quad j = -1, -2, \dots, 1-m, \\ \alpha_{\pm m}^{n+1} &= \alpha_{\pm m}^n, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (21)$$

と与えられるものとすれば，Hankel 行列式の  $n \rightarrow \infty$  での漸近挙動を用いて，Schur パラメータの比が

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k^n}{\alpha_{k-1}^n} = z_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (22)$$

のようにある定数  $z_k$  に収束すること，および， $z_k$  は多項式

$$q(z) = c_0 z^m + c_1 z^{m-1} + \cdots + c_{m-1} z + c_m$$

の実単純な零点であることが証明できる [11] . 以上により , discrete Schur flow には連分数計算だけでなく多項式の零点の計算機能があることがわかった . progressive discrete Schur flow は Henrici による progressive qd アルゴリズム [5] の対応物とみなせよう .

## 4 Lotka-Volterra 系による特異値計算

§2 で , 実軸上の直交多項式を定める symmetric な測度の高次の 1 パラメータ変形として semi-infinite Lotka-Volterra 系が導かれることに触れた . 本節では , Tsujimoto-Nakamura-Iwasaki [25] に従って finite Lotka-Volterra 系

$$\begin{aligned} \frac{du_k(t)}{dt} &= u_k(t)(u_{k+1}(t) - u_{k-1}(t)), \quad k = 1, \dots, 2m - 1, \\ u_0(t) &= 0, \quad u_{2m}(t) = 0, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

について考える . この方程式の可積分差分として , 例えば , discrete-time Lotka-Volterra 系

$$\begin{aligned} u_{2k-1}^{(n+1)} (1 + u_{2k-2}^{(n+1)}) &= u_{2k-1}^{(n)} (1 + u_{2k}^{(n)}), \quad u_0^{(n)} = 0, \quad k = 1, \dots, m, \\ u_{2k}^{(n+1)} (1 + u_{2k-1}^{(n+1)}) &= u_{2k}^{(n)} (1 + u_{2k+1}^{(n)}), \quad u_{2m}^{(n)} = 0, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (23)$$

が知られている [7] . この方程式の解 (タウ関数解) は以下の通りである . まず ,  $\{a_j^n\}$  を線形差分方程式

$$a_j^{n+1} = a_{j+1}^n + a_j^n, \quad j, n = 0, 1, \dots \quad (24)$$

を満たす数列とする . これを用いて Hankel 行列式

$$\begin{aligned} H_{k,j}^{(n)} &\equiv \begin{vmatrix} a_j^n & a_{j+1}^n & \cdots & a_{j+k-1}^n \\ a_{j+1}^n & a_{j+2}^n & \cdots & a_{j+k}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j+k-1}^n & a_{j+k}^n & \cdots & a_{j+2k-2}^n \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \\ H_{-1,j}^{(n)} &\equiv 0, \quad H_{0,j}^{(n)} \equiv 1, \quad H_{m+1,j}^{(n)} \equiv 0, \quad j, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (25)$$

を定める , ただし , 正値性

$$H_{k,0}^{(n)} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

が成り立つものとする . このとき ,

$$u_{2k-1}^{(n)} = \frac{H_{k,1}^{(n)} H_{k-1,0}^{(n+1)}}{H_{k,0}^{(n)} H_{k-1,1}^{(n+1)}}, \quad u_{2k}^{(n)} = \frac{H_{k+1,0}^{(n)} H_{k-1,1}^{(n+1)}}{H_{k,1}^{(n)} H_{k,0}^{(n+1)}} \quad (26)$$



と discrete Lax 形式に書ける [8] . 以下 , discrete-time finite Toda 方程式と discrete-time finite Lotka-Volterra 系の解の間の直接的対応 (Miura (or, Bäcklund) 変換 [7])

$$\begin{aligned} e_k^{(n)} &= u_{2k-1}^{(n)} u_{2k}^{(n)}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \\ q_k^{(n)} &= \left(1 + u_{2k-2}^{(n)}\right) \left(1 + u_{2k-1}^{(n)}\right), \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (28)$$

を用いて Lotka-Volterra 系の discrete Lax 形式を導出しよう .

まず , 3 重対角行列  $Y^{(n)}$  を

$$Y^{(n)} \equiv L^{(n)} R^{(n)} - I \quad (29)$$

により定める . 定義により  $Y^{(n)}$  は変数  $w_{2k-1}^{(n)}, w_{2k}^{(n)}$  を用いて

$$Y^{(n)} = \begin{pmatrix} y_{1,1}^{(n)} & (y_{1,2}^{(n)})^2 & & & & \\ & 1 & y_{2,2}^{(n)} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & (y_{m-1,m}^{(n)})^2 & \\ & & & & 1 & y_{m,m}^{(n)} \end{pmatrix},$$

$$y_{k,k}^{(n)} \equiv w_{2k-2}^{(n)} + w_{2k-1}^{(n)}, \quad y_{k,k+1}^{(n)} \equiv \sqrt{w_{2k-1}^{(n)} w_{2k}^{(n)}}$$

と書ける . タウ関数の正値性より  $w_{2k-1}^{(n)} w_{2k}^{(n)} > 0$  が成り立つ . Toda 方程式の discrete Lax 形式から

$$Y^{(n+1)} R^{(n)} = R^{(n)} Y^{(n)}$$

を得るが , ここに含まれる変数  $w_{2k-1}^{(n)}, w_{2k}^{(n)}, V_k^{(n)}$  はすべて discrete-time finite Lotka-Volterra 系の変数  $u_{2k-1}^{(n)}, u_{2k}^{(n)}$  だけで書き下すことができるので ,  $Y^{(n+1)} R^{(n)} = R^{(n)} Y^{(n)}$  は Lotka-Volterra 系の discrete Lax 形式とみなせよう . さらに ,  $Y^{(n)}$  を対称化して

$$\begin{aligned} Y_S^{(n)} &\equiv (G^{(n)})^{-1} Y^{(n)} G^{(n)}, \\ G^{(n)} &\equiv \text{diag} \left( g_{1,1}^{(n)}, \dots, g_{m-1,m-1}^{(n)}, 1 \right), \quad g_{k,k}^{(n)} \equiv \prod_{j=k}^{m-1} \sqrt{w_{2j-1}^{(n)} w_{2j}^{(n)}} \end{aligned}$$

を導入すれば , discrete Lax 形式は

$$Y_S^{(n+1)} = (G^{(n+1)})^{-1} R^{(n)} G^{(n)} Y_S^{(n)} \left( (G^{(n+1)})^{-1} R^{(n)} G^{(n)} \right)^{-1}$$

とも書ける . これは ,  $Y_S^{(n)}$  の固有値が時間発展  $n \Rightarrow n+1$  のもとで不変であることを意味している . 同時に ,  $Y_S^{(n)}$  は

$$Y_S^{(n)} = (B^{(n)})^\top B^{(n)},$$

$$B^{(n)} \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{w_1^{(n)}} & \sqrt{w_2^{(n)}} & & & \\ & \sqrt{w_3^{(n)}} & \cdots & & \\ & & \cdots & \sqrt{w_{2m-2}^{(n)}} & \\ 0 & & & & \sqrt{w_{2m-1}^{(n)}} \end{pmatrix} \quad (30)$$

なる形に Cholesky 分解可能だから  $Y_S^{(n)}$  は正定値であることもわかる。

さて、本節の前半で述べたようにタウ関数解の  $n \rightarrow \infty$  での漸近挙動より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_S^{(n)} = \text{diag} \left( \frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \dots, \frac{1}{z_k} \right) \quad (31)$$

である。従って、極限の行列の対角成分  $1/z_k$  は初期値の行列  $Y_S^{(0)}$  の固有値である。この事実と Cholesky 分解とを合わせれば

$$\sigma_k \equiv \frac{1}{\sqrt{z_k}}$$

は初期値の上 2 重対角行列  $B^{(0)}$  の特異値に他ならないことがわかる。

線形数値計算の理論で知られているように、任意の  $m_1 \times m_2$  長方形行列  $A$ 、ただし、 $m_1 \leq m_2$ 、は適当な直交行列  $U, V$  によって、 $UAV = (B \ O)$  の形に変換できる。ここに、 $B$  は  $m_1 \times m_1$  上 2 重対角行列、 $O$  は  $m_1 \times (m_2 - m_1)$  零行列 (cf. [4])。  $m_2 \times m_1$  長方形行列についても同様。ゆえに、discrete-time finite Lotka-Volterra 系は広いクラスの行列の特異値計算機能をもつことがわかる。付録では、Lotka-Volterra 系による  $10 \times 10$  行列の特異値計算例を与える。49 回の反復で  $10^{-6}$  の精度で収束し、1 回の反復における乗除算の数は 38 回である。

## 5 Toda 型応用解析と Schur 型応用解析 - 結び -

qd アルゴリズムは Rutishauser [19] によって 1954 年に発見された。2 種類の添え字  $k$  と  $n$  のいずれの方向に計算を進めるかでこのアルゴリズムの運用法は 2 通りに大別される。このうち、 $n \Rightarrow n+1$  の計算では、有理型関数の極の計算 [19] を基礎とし、多項式の零点の数値安定な計算法である progressive qd アルゴリズム [20] へと発展した。続いて、Rutishauser [22] は qd アルゴリズムから行列の固有値計算法 ( $LR$  アルゴリズム) を案出した。他方、 $k \Rightarrow k+1$  の計算では、Class N 関数の Chebyshev 連分数展開の計算 [19] が知られている。Henrici [5], [6] は Rutishauser の先駆的結果を整理しその詳細を論じた。

Rutishauser [21] はまた同じ 1954 年に qd アルゴリズムの連続極限の微分方程式を導出してアルゴリズムの漸近挙動を解析した。この微分方程式は今日いう semi-infinite Toda 方程式なる可積分系に他ならない。qd アルゴリズムのもつ 2 種類の添え字  $k$  と  $n$  はそれぞれ Toda 方程式の空

間，時間変数に相当する．逆に，Toda 方程式の可積分構造を保つ差分化が qd アルゴリズムに一致することが Hirota 等 [8] によって示されている．

別の視点からは，semi-infinite Toda 方程式は，(Legendre, Hermite, Laguerre など) 実軸上の直交多項式の係数の非線形の変形方程式との理解も可能である．実軸上の直交多項式を定める測度の線形 1 パラメータ変形が Toda 方程式の流れを引き起こすのである．なお，Toda 方程式のタウ関数 (Hankel 行列式) の正值性は関連する Hamburger のモーメント問題の可解性を保証している．また，qd アルゴリズム，すなわち，discrete-time Toda 方程式の時間・空間発展には実軸上の直交多項式の Geronimus 変換や discrete Darboux 変換なる操作が対応している．これら Toda 方程式に関連した古典解析の概念を「Toda 型応用解析の世界」と呼ぶことにする．Toda 方程式によりこの世界に可積分系の時間・空間変数による経緯線が引かれた．§2 で見たように，Toda 方程式の時間変数  $n = 1, 2, \dots$  の導入により初めて Chebyshev 連分数の多項式時間での計算  $k \Rightarrow k + 1$  が可能になったのである．

この視座の獲得により，なぜある種のアルゴリズムが可積分系の構造をもつのかの一端が理解できるようになるとともに，「可積分系主導によるアルゴリズム開発のプログラム」が現実のものとなった．本稿 §4 では symmetric な測度の変形方程式である Lotka-Volterra 系の可積分差分による特異値計算法 [25] を論じ，タウ関数解の  $n \rightarrow \infty$  での漸近挙動と discrete-time Lotka-Volterra 系の Lax 表示を合わせることで解の特異値への収束性が証明された．これはタウ関数と Lax 表示という可積分系研究のキーワードを駆使することで得られた「Toda 型応用解析の世界」における最新結果である．

一方，Class N 関数，Chebyshev 連分数，Hamburger モーメント問題，実軸上の直交多項式の世界には，Class C 関数，Perron 連分数，3 角モーメント問題，単位円周上の直交多項式 (Szegő 多項式) という “parallel world” (cf. [1], [24]) が存在する．この世界に登場するのはどの可積分系であろうか？ 最近，文献 [10] において，単位円周上の直交多項式を定める測度の 1 パラメータ変形から直交多項式の係数 (Schur パラメータ) の非線形の変形方程式，Schur flow，が誘導されることが示された．本稿 §3 では [10], [11] に基づいて，discrete Schur flow による Class C 関数の Perron 連分数展開の計算法と full-discrete mKdV 方程式 (discrete real Schur flow) による多項式の零点の計算法を与えた．これによって Rutishauser 以来 45 年を経て漸く「Schur 型応用解析の世界」にも可積分系による経緯線が描かれるようになったのである．

最後に，本稿に登場した「Toda 型応用解析の世界」と「Schur 型応用解析の世界」の諸概念をまとめよう．

|                             | Toda 型応用解析の世界                                   | Schur 型応用解析の世界         |
|-----------------------------|---|------------------------|
| 関数のクラス                      | Class N   | Class C                |
| 補間問題                        | Nevanlinna                                      | Carathéodory           |
| 積分表示                        | Nevanlinna                                      | Herglotz               |
| モーメント問題                     | Hamburger                                       | 3角                     |
| 連分数展開                       | Chebyshev                                       | Perron                 |
| 連分数の係数                      | Hankel 行列式                                      | Toeplitz 行列式           |
| 直交多項式                       | 実軸上   | 単位円周上 (Szëgo)          |
| 固有多項式とする行列                  | Jacobi 行列                                       | unitary Hessenberg     |
| アルゴリズム                      | qd (LR) アルゴリズム                                  | “discrete Schur flow”  |
| 空間シフト $k \Rightarrow k + 1$ | Chebyshev 連分数計算                                 | Perron 連分数計算           |
| 時間発展 $n \Rightarrow n + 1$  | 有理型関数の極の計算<br>多項式の零点の計算<br>行列の固有値計算<br>行列の特異値計算 | 多項式の零点の計算              |
| 可積分系                        | discrete-time Toda 方程式                          | “discrete Schur flow”  |
| タウ関数解                       | Hankel 行列式                                      | Toeplitz 行列式           |
| 連続時間極限                      | Toda 方程式  | “Schur flow”           |
| symmetric case              | Lotka-Volterra 系                                | semi-discrete mKdV 方程式 |

本研究の一部は文部省科学研究費 12440025, 12554004, 12640121 の援助による .

## 参考文献

- [1] N. I. Akhiezer, *The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis*, Olver & Boyd, Edinburgh, 1965.
- [2] A. I. Aptekarev, A. Branquinho, F. Marcellán, *Toda-type differential equations for the recurrence coefficients of orthogonal polynomials and Freud transformation*, J. Comput. Appl. Math. **78**(1997), 139–160.
- [3] P. Deift, *Continuous versions of some discrete maps or what goes on when the lights go out*, J. Analyse Math. **58**(1992), 121–133.
- [4] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, Third Edition, The Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1996.
- [5] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis Vol. 1*, John Wiley, NewYork, 1974.
- [6] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis Vol. 2*, John Wiley, NewYork, 1977.
- [7] R. Hirota, S. Tsujimoto, *Conserved quantities of a class of nonlinear difference equations*, J. Phys. Soc. Japan **64**(1995), 3125–3127.
- [8] R. Hirota, S. Tsujimoto and T. Imai, *Difference scheme of soliton equations*, in: Future Directions of Nonlinear Dynamics in Physical and Biological Systems, P. L. Christiansen, J. C. Eilbeck and R. D. Parmentier Eds., Plenum, New York, 1993, pp. 7–15.

- [9] Y. Kato and K. Aomoto, *Jacobi-Perron algorithms, bi-orthogonal polynomials and inverse scattering problems*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **20**(1984), 635–658.
- [10] A. Mukaihira and Y. Nakamura, *Schur flow for orthogonal polynomials on the unit circle and its integrable discretization*, J. Comput. Appl. Math. (2002), to appear.
- [11] A. Mukaihira and Y. Nakamura, *Integrable discretization of the modified KdV equation and applications*, Inverse Problems **16**(2000), 413–424.
- [12] Y. Nakamura, *Lax pair and fixed point analysis of Karmarkar’s projective scaling trajectory for linear programming*, Japan J. Indust. Appl. Math. **11**(1994), 1–9.
- [13] Y. Nakamura, *Jacobi algorithm for symmetric eigenvalue problem and integrable gradient system of Lax form*, Japan J. Indust. Appl. Math. **14**(1997), 159–168.
- [14] Y. Nakamura, *Calculating Laplace transforms in terms of the Toda molecule*, SIAM J. Sci. Comput. **20**(1999), 306–317.
- [15] Y. Nakamura, *Algorithms associated with arithmetic, geometric and harmonic means and integrable systems*, J. Comput. Appl. Math. (2001), **131**(2001), 161–174.
- [16] Y. Nakamura, K. Kajiwara and H. Shiotani, *On an integrable discretization of the Rayleigh quotient gradient system and the power method with a shift*, J. Comput. Appl. Math. **96**(1998), 77–90.
- [17] 中村佳正, 可積分系とアルゴリズム, 「可積分系の応用数理」(第5章), 掌華房, 2000, pp. 171–223.
- [18] V. Papageorgiou, B. Grammaticos and A. Ramani, *Integrable lattices and convergence acceleration algorithms*, Phys. Lett. **A179**(1993), 111–115.
- [19] H. Rutishauser, *Ein Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, Z. angew. Math. Phys. **5**(1954), 233–251.
- [20] H. Rutishauser, *Anwendungen des Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, Z. angew. Math. Phys. **5**(1954), 496–508.
- [21] H. Rutishauser, *Ein infinitesimales Analogon zum Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, Arch. Math. **5**(1954), 132–137.
- [22] H. Rutishauser, *Solution of eigenvalue problems with the LR-transformation*, Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser. **49**(1958), 47–81.
- [23] W. W. Symes, *The QR algorithm and scattering for the finite nonperiodic Toda lattice*, Physica **4D**(1982), 275–280.
- [24] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc., Providence, 1975.
- [25] S. Tsujimoto, Y. Nakamura and M. Iwasaki, *Discrete Lotka-Volterra system computes singular values*, Inverse Problems, **17**(2001), 53–58.