京都大学数理解析研究所講究録 **889** (1994) 101

非線形シュレーディンガー型方程式の双線形構造

東大・工　筧 三郎　(Saburo Kakei)*
東大・工　佐々成正　(Narimasa Sasa)
東大・数理科学　薩摩順吉　(Junkichi Satsuma)

1　はじめに

「可積分」なソリトン方程式の特徴として, 適当な従属変数変換により広田型の微分方程式, すなわち, いわゆる双線形方程式に変換されるということが挙げられる. (ここでは「N ソリトン解が存在する」, 「方程式が Lax 形式で書ける」という程度の意味で「可積分」という言葉を使っている.) 光ソリトンを記述する方程式として知られる非線形シュレーディンガー方程式も双線形されるが, KdV 方程式などの場合と違って複素構造の問題が生じてくる. つまり, 双線形方程式の解から元の方程式の解を構成する際に適当な条件 (reality condition) を要請しなくてはならないのである.

一方, 物理的な観点から非線形シュレーディンガー方程式に高次項を付加することが行なわれているが, いくつかの場合においては高次項を加えてもなお双線形化が可能である. もちろんその場合にも複素構造の問題は存在し, 具体的な解の構成に際してはそのパラメーターには制限がおかれる. これまでに知られているいくつかの例を眺めてみると, ソリトン解の場合おいてはパラメーターに適当に制限をおけばうまくいくことが分っているが [1][3], その条件が何を意味するかについてはあまり考察されていなかった. 要請すべき条件は方程式ごとに異なるので, それらを代数的な言葉で特徴づけることができれば, 可積分な高次非線形シュレーディンガー方程式を統一的に分類することが可能となるはずである.

本論説では, 非線形シュレーディンガー方程式, 微分型非線形シュレーディンガー方程式について, それらの解空間を広田の双線形化法に基づいて解析する. 広田の方法の利点として解空間の持つ代数的構造が明解になることが挙げられるが, それをさらに徹底させたものとして, 伊達・神保・柏原・三輪による free fermion の方法がある [9]. その手法を用いれば, 方程式の解空間の対称性がアフィン・リー環で表されることが鮮明に見てとれる.

* e-mail address: kakei@mmm.t.u-tokyo.ac.jp

その立場から, 方程式に要請される条件 (reality condition) とアフィン・リー環の実形との対応についても述べる.

2　方程式の双線形化

2.1　非線形シュレーディンガー方程式

この節では, 明るいソリトン解を持つタイプの非線形シュレーディンガー方程式 (nonlinear Schrödinger equation; 以下では NLSE と略す),

$$\mathrm{i}Q_T + Q_{XX} + 2|Q|^2 Q = 0, \tag{2.1}$$

の双線形構造をまとめておく (*cf.* [1][9]). (分散項と非線形項とが同符合のときは明るいソリトン解, 異符合のときは暗いソリトン解を持つことが知られている.)

まず, 方程式 (2.1) の複素構造をとりあえずは忘れて, 次のような非線形拡散方程式の連立系として考えよう;

$$u_{x_2} + u_{x_1x_1} - 2u^2 v = 0, \tag{2.2a}$$

$$-v_{x_2} + v_{x_1x_1} - 2uv^2 = 0. \tag{2.2b}$$

ここで, 次の従属変数変換を導入する;

$$u = \frac{G}{F}, \qquad v = \frac{\tilde{G}}{F}. \tag{2.3}$$

ここで導入した F, G が以下の双線形方程式を満たすとき, 上の u, v は方程式 (2.2) を満足する;

$$(D_{x_2} + D_{x_1}^2) F \cdot G = 0, \tag{2.4a}$$

$$(D_{x_2} - D_{x_1}^2) F \cdot \tilde{G} = 0, \tag{2.4b}$$

$$D_{x_1}^2 F \cdot F + 2G\tilde{G} = 0. \tag{2.4c}$$

この式において, いわゆる「広田の D-operator」を用いた;

$$D_x^m D_t^n F(x,y) \cdot G(x,t) = (\partial_x - \partial_{x'})^m (\partial_t - \partial_{t'})^n F(x,y) G(x',t')\big|_{x'=x,t'=t}.$$

方程式 (2.2) は, $x_1 = -\mathrm{i}X$, $x_2 = -\mathrm{i}T$ と置けば (2.1) に一致する. この置換えの妥当性については後ほど議論する.

2.2　微分型非線形シュレーディンガー方程式

微分型非線形シュレーディンガー方程式 (derivative nonlinear Schrödinger equation; 以下では DNLSE と略す) とは, (2.1) に $f(Q)Q_x$ の形の非線形項を付け加えたものである. 可積分なものとしては, 次の 2 つがよく知られている;

- Chen-Lee-Liu 方程式 (CLLE)[2][3]

$$\mathrm{i}Q_T + Q_{XX} + 2\mathrm{i}|Q|^2 Q_X = 0, \tag{2.5}$$

- Kaup-Newell 方程式 (KNE)[4]

$$\mathrm{i}Q_T + Q_{XX} + 2\mathrm{i}(|Q|^2 Q)_X = 0. \tag{2.6}$$

この 2 つの方程式は "ゲージ変換" でつながっていることが知られているが [5], その手法をより一般的な状況で適用すると, 次の方程式に達する [6];

$$\mathrm{i}Q_T + Q_{XX} + \beta|Q|^2 Q + \mathrm{i}(4\delta + 2\alpha)|Q|^2 Q_X + \mathrm{i}(4\delta + \alpha)Q^2 Q_X^* + \delta(4\delta + \alpha)|Q|^4 Q = 0, \tag{2.7}$$

(Q^* は Q の複素共役). 以下では, この方程式を GDNLSE (generalized derivative nonlinear Schrödinger equation) と略称する. この方程式は特別な場合として CLLE, KNE を含むことを注意しておく.

双線形化の立場からの DNLSE の解析は, 最初は CLLE に対して行なわれた [3]. 論文 [3] において, Nakamura, Chen は CLLE を従属変数変換により双線形化し, それに基づいて多ソリトン解を構成した. その後, 広田は CLLE も KNE も共通の双線形構造を持つことを見い出し, それらの解が行列式で表されることを示した [7]. 我々はその結果をさらに拡張し, 上の GDNLSE がパラメーターの任意の値に対して共通の双線形構造を持つことを示した [8].

まず, 方程式 (2.7) に対して以下のように変数を変換し, 方程式の形を簡単化しておこう ($\alpha > 0$ を仮定する).

$$\begin{aligned} Q(X,T) &= \sqrt{\frac{2}{\alpha}} q(x,t) \exp\left(\frac{\mathrm{i}\beta}{\alpha}x + \frac{\mathrm{i}\beta^2}{\alpha^2}t\right), \\ X = x + \frac{2\beta}{\alpha}t, &\qquad T = t, \qquad \gamma = \frac{4\delta}{\alpha} + 2. \end{aligned}$$

すると (2.7) は次の標準形に帰着する;

$$\mathrm{i}q_t + q_{xx} + 2\mathrm{i}\gamma|q|^2 q_x + 2\mathrm{i}(\gamma - 1)q^2 q_x^* + (\gamma - 1)(\gamma - 2)|q|^4 q = 0. \tag{2.8}$$

ここでもこの方程式の持つ複素構造をとりあえずは無視し, 次のような拡散方程式の連立系として考える;

$$u_{x_2} - u_{x_1x_1} + 2\gamma uvu_{x_1} + 2(\gamma-1)u^2v_{x_1} + (\gamma-1)(\gamma-2)u^3v^2 = 0, \tag{2.9a}$$

$$-v_{x_2} - v_{x_1x_1} - 2\gamma uvv_{x_1} - 2(\gamma-1)v^2u_{x_1} + (\gamma-1)(\gamma-2)u^2v^3 = 0. \tag{2.9b}$$

次のような従属変数変換を考えよう;

$$u = \frac{f^{\gamma-1}g}{\tilde{f}^{\gamma}}, \qquad v = \frac{\tilde{f}^{\gamma-1}\tilde{g}}{f^{\gamma}}, \tag{2.10}$$

変換式 (2.10) において, f, $\tilde{f}$, g, $\tilde{g}$ が以下の双線形方程式を満足すれば, u, v は方程式 (2.9) を満足することが示される [8];

$$(D_{x_1}^2 + D_{x_2})f\cdot\tilde{f} = 0, \tag{2.11a}$$

$$(D_{x_1}^2 - D_{x_2})f\cdot\tilde{g} = 0, \tag{2.11b}$$

$$(D_{x_1}^2 + D_{x_2})\tilde{f}\cdot g = 0, \tag{2.11c}$$

$$D_{x_1}^2 f\cdot f + 2gh = 0, \tag{2.11d}$$

$$D_{x_1}^2 \tilde{f}\cdot\tilde{f} + 2\tilde{g}\tilde{h} = 0, \tag{2.11e}$$

$$D_{x_1} f\cdot\tilde{f} - g\tilde{g} = 0, \tag{2.11f}$$

$$D_{x_1} f\cdot\tilde{g} - \tilde{f}h = 0, \tag{2.11g}$$

$$D_{x_1} \tilde{f}\cdot g + f\tilde{h} = 0. \tag{2.11h}$$

(ここで, h 及び $\tilde{h}$ は補助的に導入した変数.)

次の目標はこれらの双線形方程式に対する解の構成である. 双線形方程式の解は行列式を用いて表されることが知られていて, 我々の論文 [8] でもその手法を用いて GDNLS のソリトン解を構成した. ここでは free fermion の方法を用いることで, 解空間の持つ対称性も調べていきたい. そのために, まず次節で free fermion を用いた方法をまとめておく.

3 Free fermions

この節では, 2 成分 KP hierarchy の τ-函数を fermion operator の真空期待値として表す方法を復習しておく [9].

まず, 次の交換関係を満たすものとして free fermions $\psi_n^{(i)}$, $\psi_n^{(i)*}$ ($n \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$) を導入しよう;

$$[\psi_n^{(i)}, \psi_m^{(j)*}]_+ = \delta_{ij}\delta_{nm}, \qquad [\psi_n^{(i)}, \psi_m^{(j)}]_+ = [\psi_n^{(i)*}, \psi_m^{(j)*}]_+ = 0.$$

この $\psi_n^{(i)}$, $\psi_n^{(i)*}$ 達から生成される Clifford 代数を $\mathcal{A}$ と表す. Fock 空間 $\mathcal{F}$ 及びその双対空間 $\mathcal{F}^*$ は, それぞれ次の条件で特徴づけられるような "vacuum vectors" $|\mathrm{vac}\rangle$, $\langle\mathrm{vac}|$ から生成される;

$$\begin{aligned} \psi_n^{(i)}|\mathrm{vac}\rangle &= 0 \quad (n<0), & \psi_n^{(i)*}|\mathrm{vac}\rangle &= 0 \quad (n\geq 0), \\ \langle\mathrm{vac}|\psi_n^{(i)} &= 0 \quad (n\geq 0), & \langle\mathrm{vac}|\psi_n^{(i)*} &= 0 \quad (n<0). \end{aligned} \tag{3.12}$$

$\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}^*$ 上には, 次式を満たす bilinear form (,) が存在する;

$$\begin{aligned} (\langle\mathrm{vac}|, |\mathrm{vac}\rangle) &= 1, \\ (\langle\mathrm{vac}|a, b|\mathrm{vac}\rangle) &= (\langle\mathrm{vac}|ab, |\mathrm{vac}\rangle) = (\langle\mathrm{vac}|, ab|\mathrm{vac}\rangle). \end{aligned}$$

この bilinear form を用いると, $\mathcal{A}$ の元 a の "真空期待値" を次のように定めることができる;

$$\begin{aligned} \langle a\rangle &= \langle\mathrm{vac}|a|\mathrm{vac}\rangle \\ &= (\langle\mathrm{vac}|a, |\mathrm{vac}\rangle) = (\langle\mathrm{vac}|, a|\mathrm{vac}\rangle). \end{aligned}$$

さらに, generalized vacuum vectors $\langle s_1, s_2|$, $|s_2, s_1\rangle$ を導入しよう;

$$\langle s_1, s_2| = \langle\mathrm{vac}|\Psi_{s_1}^{(1)*}\Psi_{s_2}^{(2)*}, \qquad |s_2, s_1\rangle = \Psi_{s_2}^{(2)}\Psi_{s_1}^{(1)}|\mathrm{vac}\rangle.$$

ここで, $\Psi_s^{(i)}$, $\Psi_s^{(i)*}$ は

$$\Psi_s^{(i)*} = \begin{cases} \psi_{-1}^{(i)}\cdots\psi_s^{(i)} & (s<0), \\ 1 & (s=0), \\ \psi_0^{(i)*}\cdots\psi_{s-1}^{(i)*} & (s>0), \end{cases} \qquad \Psi_s^{(i)} = \begin{cases} \psi_s^{(i)*}\cdots\psi_{-1}^{(i)*} & (s<0), \\ 1 & (s=0), \\ \psi_{s-1}^{(i)}\cdots\psi_0^{(i)} & (s>0), \end{cases}$$

で定義される.

次に, fermion の時間発展を定めよう. $n\in\mathbb{N}$, $i=1,2$ に対して,

$$H_n^{(i)} = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\psi_j^{(i)}\psi_{j+n}^{(i)*},$$

とする. この $H_n^{(i)}$ を用いて, Hamiltonian $H(x^{(1)}, x^{(2)})$ を次のように定める;

$$H(x^{(1)}, x^{(2)}) = \sum_{i=1,2}\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^{(i)} H_n^{(i)}.$$

さらに,

$$\psi^{(i)}(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\psi_n^{(i)}k^n, \qquad \psi^{(i)*}(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\psi_n^{(i)*}k^{-n},$$

とすれば, これらは

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{H(x^{(1)},x^{(2)})}\psi^{(i)}(k)\mathrm{e}^{-H(x^{(1)},x^{(2)})} &= \mathrm{e}^{\xi(x^{(i)};k)}\psi^{(i)}(k), && (3.13)\\
\mathrm{e}^{H(x^{(1)},x^{(2)})}\psi^{(i)*}(k)\mathrm{e}^{-H(x^{(1)},x^{(2)})} &= \mathrm{e}^{-\xi(x^{(i)};k)}\psi^{(i)*}(k), && (3.14)
\end{aligned}
$$

という性質を持つ. ただし, $\xi(x;k) = \sum_{n=1}^{\infty} k^n x_n$ である.

以上の準備の下に 2 成分 KP hierarchy の τ-函数を定義しよう;

$$
\tau_{s_1,s_2;m}(x^{(1)},x^{(2)}) = \langle s_1-m, s_2+m|\mathrm{e}^{H(x^{(1)},x^{(2)})}\boldsymbol{g}|s_2,s_1\rangle. \tag{3.15}
$$

ここで $\boldsymbol{g}$ は Clifford group の元である [9]. この τ-函数は, 次の bilinear identity を満たすことが示される;

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-)^{m-m'+l_2}p_j(-2a)p_{j+l_1-m+m'-1}(\tilde{D}^{(1)})\\
&\quad\times\ \exp(\sum_{n=1}^{\infty}(a_nD_n^{(1)}+b_nD_n^{(2)}))\tau_{s_1,s_2;m'-1}\cdot\tau_{s_1+l_1,s_2+l_2;m+1}\\
&+\ \sum_{j\in\mathbb{Z}}(-)^{m-m'+l_2}p_j(-2b)p_{j+l_2+m-m'+1}(\tilde{D}^{(2)})\\
&\quad\times\ \exp(\sum_{n=1}^{\infty}(a_nD_n^{(1)}+b_nD_n^{(2)}))\tau_{s_1,s_2;m'}\cdot\tau_{s_1+l_1,s_2+l_2;m}.
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

ここで $p_n(x) = p_n(x_1,x_2,\cdots)$ は $\exp(\sum_{n=1}^{\infty}x_nk^n) = \sum_{n=0}^{\infty}p_n(x)k^n$. で定義される. この (3.16) をパラメーター $a = (a_1,a_2,\cdots)$, $b = (b_1,b_2,\cdots)$ に関して展開することによって, $\tau_{s_1,s_2;m}$ の満たす双線形方程式が得られる.

このようにして得られる一連の双線形方程式から $1+1$ 次元のソリトン方程式に対するものを得るには, 解のパラメーターに制限を加えてリダクションを行なう必要がある. このことは, 代数的には変換群に制限を加えていることに対応する. NLSE の場合は, 複素構造を無視すれば (すなわち, (2.2) で考えるということ), 対応するリー環は $A_1^{(1)}$ である [9]. このことについては節を改めて議論していこう.

4 アフィン・リー環と reality condition

4.1 $A_1^{(1)}$ へのリダクション

まず, 以下のような fermion の空間の自己同型 ι を用意しておく;

$$
\iota(\psi_n^{(i)}) = \psi_{n+1}^{(i)}, \quad \iota(\psi_n^{(i)}*) = \psi_{n+1}^{(i)*}, \qquad (n\in\mathbb{N}, i=1,2)
$$

Fock 空間 $\mathcal{F}$ の次のような自己同型も, 同じ ι で表すことにする;

$$\begin{aligned}\iota(|0,0\rangle) &= \psi_0^{(1)}\psi_0^{(2)}|0,0\rangle = |1,1\rangle,\\ \iota(a|v\rangle) &= \iota(a)\iota(|v\rangle) \qquad (a\in\mathcal{A},\ \ |v\rangle\in\mathcal{F}).\end{aligned}$$

fermion の 2 次式で上の ι に関して不変なもののうち, $\psi^{(1)}(p)\psi^{(2)*}(p)$, $\psi^{(2)}(p)\psi^{(1)*}(p)$, $:\psi^{(1)}(p)\psi^{(1)*}(p):-:\psi^{(2)}(p)\psi^{(2)*}(p):$ ($:\ \ :$ は正規順序) という形の元で張られるリー環を考えると, アフィン・リー環 $A_1^{(1)}$ に同型であることが知られている.

真空期待値 $\langle s_1,s_2|a|s_2,s_1\rangle$ は, この ι に関して次の対称性を持つ;

$$\langle s_1,s_2|a|s_2',s_1'\rangle = \langle s_1+1,s_2+1|\iota(a)|s_2'+1,s_1'+1\rangle. \tag{4.17}$$

よって, (3.15) 中の $\boldsymbol{g}$ が $\iota(\boldsymbol{g})=\boldsymbol{g}$ を満足すれば, (4.17) により $\tau_{s_1,s_2;m}$ は

$$\tau_{s_1+1,s_2+1;m} = \tau_{s_1,s_2;m} \tag{4.18}$$

という対称性を持つことになり, 以下のように F, f, $\tilde{f}$ 等を定めれば双線形方程式 (2.4a–c), (2.11a–h) を満たすことが示される;

$$\begin{aligned}F &= \tau_{0,0;0}, & G &= \tau_{0,0;-1}, & \tilde{G} &= \tau_{0,0;1},\\ f &= \tau_{0,0;0}, & g &= \tau_{0,0;-1}, & h &= \tau_{0,0;1},\\ \tilde{f} &= \tau_{1,0;0}, & \tilde{g} &= \tau_{1,0;1}, & \tilde{h} &= \tau_{1,0;-1}.\end{aligned} \tag{4.19}$$

すなわち, 通常の NLSE も GDNLSE も, 複素構造を考えなければ同じ制限条件の下で解が構成されるのである [9].

これらから NLSE, GDNLSE の解を構成するには, 解のパラメーターにさらに制限を加えて複素構造を回復してやる必要がある. その操作を代数的にとらえるために, 以下では ι 以外の fermion の空間の自己同型を定義し, それらを用いて, (3.15) 中の $\boldsymbol{g}$ にさらに制限を加えていく.

4.2 NLSE

自己同型 ρ を

$$\rho(\psi_n^{(i)}) = \psi_{-n-1}^{(i)*}, \quad \rho(\psi_n^{(i)*}) = \psi_{-n-1}^{(i)}, \qquad (n\in\mathbb{Z}, i=1,2)$$

で定める. このとき,

$$\langle 0,0|a|0,0\rangle = \langle 0,0|\rho(a)|0,0\rangle \tag{4.20}$$

が成り立つ. また, この ρ に関して, $\rho \circ \rho = id$ が成り立つことを注意しておく.

上で定義した ρ について $H_n^{(i)}$ $(n \in \mathbb{N},\ i = 1, 2)$ への作用を調べると, $\rho(H_n^{(i)}) = -H_n^{(i)}$ となる. よって $x_n^{(i)} \in \mathrm{i}\mathbb{R}(n \in \mathbb{N},\ i = 1, 2)$ としておけば,

$$\rho\left(H(x^{(1)}, x^{(2)})\right) = \left(H(x^{(1)}, x^{(2)})\right)^*$$

となる (少々紛らわしいが, $*$ で複素共役をとる操作を表す). さらに, $\rho(\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{g}^*$ を仮定しよう. すると, (4.20) により,

$$\begin{aligned}
\langle 0, 0|\mathrm{e}^{H(x^{(1)}, x^{(2)})}\boldsymbol{g}|0, 0\rangle &= \langle 0, 0|\rho\left(\mathrm{e}^{H(x^{(1)}, x^{(2)})}\boldsymbol{g}\right)|0, 0\rangle \\
&= \left(\langle 0, 0|\mathrm{e}^{H(x^{(1)}, x^{(2)})}\boldsymbol{g}|0, 0\rangle\right)^*, \\
\langle 1, -1|\mathrm{e}^{H(x^{(1)}, x^{(2)})}\boldsymbol{g}|0, 0\rangle &= \langle 0, 0|\psi_0^{(1)*}\psi_{-1}^{(2)}\mathrm{e}^{H(x^{(1)}, x^{(2)})}\boldsymbol{g}|0, 0\rangle \\
&= \langle 0, 0|\rho\left(\psi_0^{(1)*}\psi_{-1}^{(2)}\mathrm{e}^{H(x^{(1)}, x^{(2)})}\boldsymbol{g}\right)|0, 0\rangle \\
&= \left(\langle -1, 1|\mathrm{e}^{H(x^{(1)}, x^{(2)})}\boldsymbol{g}|0, 0\rangle\right)^*,
\end{aligned}$$

が成り立つ. よって, (2.3) の F, G, $\tilde{G}$ の間に $F^* = F$, $G^* = \tilde{G}$ という関係が成り立つことになり, (2.2) において $u = v^*$ となるので, $Q = u$, $x_1 = -\mathrm{i}X$, $x_2 = -\mathrm{i}T$ とおけば, (2.3) は (2.1) の NLSE に一致する.

4.3 GDNLSE

GDNLSE に対しては, 次のような自己同型 σ を考える;

$$\begin{aligned}
\sigma(\psi_n^{(1)}) &= \psi_n^{(2)}, & \sigma(\psi_n^{(2)}) &= \psi_{n+1}^{(1)}, \\
\sigma(\psi_n^{(1)*}) &= \psi_n^{(2)*}, & \sigma(\psi_n^{(2)*}) &= \psi_{n+1}^{(1)*}.
\end{aligned}$$

このとき,

$$\langle 0, 0|a|0, 0\rangle = \langle 1, 0|\sigma(a)|0, 1\rangle \tag{4.21}$$

が成り立つ. この σ は, 一般には $\sigma \circ \sigma = id$ を満たさないが, 条件 $\iota(\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{g}$ を満たす部分空間の上では $\sigma \circ \sigma (= \iota) = id$ となる.

この σ について $H_n^{(i)}$ $(n \in \mathbb{N},\ i = 1, 2)$ への作用を調べると, 今度は $\rho(H_n^{(1)}) = H_n^{(2)}$, $\rho(H_n^{(2)}) = H_n^{(1)}$ となる. よって, この場合は $(x_n^{(1)})^* = x_n^{(2)}$ $(n \in \mathbb{N})$ としておけば,

$$\rho\left(H(x^{(1)}, x^{(2)})\right) = \left(H(x^{(1)}, x^{(2)})\right)^*$$

が成り立つ．さらに $\rho(\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{g}^*$ を仮定すれば, (4.21) により,

$$\begin{aligned}
\langle 0,0|\mathrm{e}^{H(x^{(1)},x^{(2)})}\boldsymbol{g}|0,0\rangle &= \langle 1,0|\sigma\left(\mathrm{e}^{H(x^{(1)},x^{(2)})}\boldsymbol{g}\right)|0,1\rangle \\
&= \left(\langle 1,0|\mathrm{e}^{H(x^{(1)},x^{(2)})}\boldsymbol{g}|0,1\rangle\right)^*, \\
\langle 1,-1|\mathrm{e}^{H(x^{(1)},x^{(2)})}\boldsymbol{g}|0,0\rangle &= \langle 0,0|\psi_0^{(1)*}\psi_{-1}^{(2)}\mathrm{e}^{H(x^{(1)},x^{(2)})}\boldsymbol{g}|0,0\rangle \\
&= \langle 1,0|\rho\left(\psi_0^{(1)*}\psi_{-1}^{(2)}\mathrm{e}^{H(x^{(1)},x^{(2)})}\boldsymbol{g}\right)|0,1\rangle \\
&= \langle 0,0|\psi_0^{(1)*}\psi_0^{(2)*}\psi_0^{(1)}\left(\mathrm{e}^{H(x^{(1)},x^{(2)})}\boldsymbol{g}\right)^*|0,1\rangle \\
&= -\left(\langle 0,1|\mathrm{e}^{H(x^{(1)},x^{(2)})}\boldsymbol{g}|0,1\rangle\right)^*,
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって, (4.19) の f, g, $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ の間に $f^* = \tilde{f}$, $g^* = -\tilde{G}$ という関係が成り立つことになり (2.9) において $u = -v^*$ となるので, $q = u$, $x_1 = -\mathrm{i}X$, $x_2 = -\mathrm{i}T$ とおけば (2.9) は (2.8) の GDNLSE に一致する．

4.4　ソリトン解の構成

N-ソリトン解を構成するには, (3.15) 中の $\boldsymbol{g}$ として, 次のものを選んでやればよい;

$$\boldsymbol{g} = \prod_{j=1}^{N} \exp\left(a_j\psi^{(1)}(p_j)\psi^{(2)*}(p_j) + b_j\psi^{(2)}(q_j)\psi^{(1)*}(q_j)\right). \tag{4.22}$$

NLSE の解にする, すなわち $\rho(\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{g}^*$ とするためには, パラメーター a_j, b_j, p_j, q_j を $q_j = p_j^*$, $b_j = -a_j^*$ を満たすようにとればよい．また, GDNLSE の解にする, すなわち $\sigma(\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{g}^*$ とするためには $q_j = p_j^*$, $b_j = (p_j a_j)^*$ を満たすようにとればよい．このように, free fermion の言葉を用いると, ソリトン解等の具体例に対する reality condition の計算が比較的容易になるのである．

5　諸言

前節で述べたことは,

$$\boxed{\text{ソリトン方程式の解空間の複素構造}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\boxed{\text{fermion の空間の自己同型}}$$

という対応関係である．このような自己同型はリー環の実形を定めるが, そのことをより具体的に見てみよう．

よく知られているように, $A_1^{(1)}$ は中心拡大されたループ代数として実現される;

$$
\begin{aligned}
A_1^{(1)} &= sl(2,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}] \ \oplus\ \mathbb{C}c \\
&= \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & -a_k \end{pmatrix} \otimes t^k \right\} \ \oplus\ \mathbb{C}c.
\end{aligned}
$$

この a_k, b_k, c_k を用いて先程の要請を具体的に書き下ろしてみよう.

- NLSE の場合 ($\rho(\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{g}^*$)
  この場合は $a_k^* = -a_k$, $b_k^* = -c_k$ により,
  $$\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & -a_k \end{pmatrix} \in su(2) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$
  となり, 解空間に作用する無限小変換は $su(2) \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}]$ となる. 木曽は, NLSE の対称性が $su(2) \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}]$ であることを Lax 形式に基づく議論により示しているが [12], ここでの結果はそれと一致する.

- GDNLSE の場合 ($\sigma(\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{g}^*$)
  この場合は $a_k^* = -a_k$, $b_k^* = c_{k+1}$ となる. この条件の意味するところは, 次のように無限行列で表すと分かりやすい;
  $$
  \left(\begin{array}{cc:cc:cc:cc:cc}
  \ddots & & \ddots & & \ddots & & & & & \\
  & \ddots & & \ddots & & \ddots & & & & \\
  \hdashline
  \ddots & & a_0 & b_0 & a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & & \\
  & \ddots & c_0 & -a_0 & c_1 & -a_1 & c_2 & -a_2 & & \\
  \hdashline
  \ddots & & a_{-1} & b_{-1} & a_0 & b_0 & a_1 & b_1 & \ddots & \\
  & \ddots & c_{-1} & -a_{-1} & c_0 & -a_0 & c_1 & -a_1 & & \ddots \\
  \hdashline
  & & a_{-2} & b_{-2} & a_{-1} & b_{-1} & a_0 & b_0 & \ddots & \\
  & & c_{-2} & -a_{-2} & c_{-1} & -a_{-1} & c_0 & -a_0 & & \ddots \\
  \hdashline
  & & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
  & & & & & \ddots & & \ddots & & \ddots
  \end{array}\right).
  $$

以上のように, 本論説では解空間の対称性を考察することで方程式の複素構造を議論してきた. Jaulent らはこのような議論を Davey-Stewartson 方程式に対して行ない, その dromion 解を構成している [10]. 上で用いた ρ は (簡単な符合因子を除いて) 彼らが用いたものと同一である.

このような視点からソリトン方程式の複素構造を統一的に取り扱うという試みは (少なくとも筆者の知る限り) あまり行なわれていなかったように思われる. これまでに行なわれていた議論では方程式の Lax 表示に着目し, Lax 形式の持つ構造として複素構造がとらえられていた [11][12].

しかし, そこではまず AKNS 型もしくは Kaup-Newell 型の Lax pair を前提とし, それらの対称性を考えている. そうすると, AKNS 形式の方程式 (例えば NLSE (2.1)) と, Kaup-Newell 形式の方程式 (例えば Kaup-Newell の DNLS (2.8)) との違いがどこから来るのかが議論できない. また, ソリトン方程式の持つ様々な性質が対称性の要請と compatible であるかどうかは, もちろん自明ではない (Frody, Kulish は方程式の Hamiltonian 構造が対称性の要請の下でも壊れないことを示している [11]). ソリトン方程式の場合には解空間が具体的にとらえられていて, そこに作用する変換群も最も根源的な変数である τ-函数を通して議論ができるのであるから, 「具体的な解をとらえる」という目的のためにはここで行なったような議論も有用であろう.

また, ここでは NLSE, GDNLSE という 2 つのケースしか取り扱わなかったが, 非線形シュレーディンガー型の方程式で可積分なものはまだ他にもある. それらに対しても同様の議論を行ない, 分類を完成させることも今後の課題である. その作業の過程でこれまでに知られていないものが見つかることを期待したい.

References

[1] R. Hirota: J. Math. Phys. **14** (1973) 805.

[2] H. H. Chen, Y. C. Lee and C. S. Liu: Physica Scripta **20** (1979) 490.

[3] A. Nakamura and H. H. Chen: J. Phys. Soc. Jpn. **49** (1980) 813.

[4] D. J. Kaup and A. C. Newell: J. Math. Phys. **19** (1978) 798.

[5] M. Wadati and K. Sogo: J. Phys. Soc. Jpn. **52** (1983) 394.

[6] A. Kundu: J. Math. Phys. **25** (1984) 3433.

[7] 広田良吾: 日本物理学会, 1988 年・秋の分科会予稿集, 5p-D4-6.

[8] S. Kakei, N. Sasa and J. Satsuma: preprint.

[9] M. Jimbo and T. Miwa: Publ. RIMS, Kyoto Univ. **19** (1983) 943.
E. Date, M. Jimbo and T. Miwa: J. Phys. Soc. Jpn. **51** (1982) 4116.
E. Date, M. Jimbo and T. Miwa: *ibid.* **52** (1982) 761.
三輪・神保・伊達: 「ソリトンの数理」, 岩波講座・応用数学 [対象 4], 岩波書店 (1993).

[10] M. Jaulent, M. A. Manna and L. Martinez-Alonso: Phys. Lett. **A151** (1990) 303.

[11] A. P. Fordy and P. P. Kulish: Comm. Math. Phys. **89** (1983) 427.
A. P. Fordy: J. Phys. **A17** (1984) 1235.

[12] K. Kiso: J. Math. Phys. **35** (1994) 284.
木曽和啓: 京都大学数理解析研究所講究録 **875** (1994) 23.