京都大学数理解析研究所講究録 **868** (1994) pp.85-97

Grassmann Hierarchy のある拡張

東大・工　　筧 三郎　(Saburo Kakei) *
東大・数理科学　薩摩順吉　(Junkichi Satsuma)

1　はじめに

ソリトン方程式を解析する際に, 非線形方程式を線形方程式系

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\Psi(k;x,t) &= U(k;x,t)\Psi(k;x,t),\\
\frac{\partial}{\partial t}\Psi(k;x,t) &= V(k;x,t)\Psi(k;x,t),
\end{aligned}
$$

の積分可能条件として捉えるという (Lax の意味での)「線形化」の手法が重要であることは言うまでもない. Ablowitz, Kaup, Newell, Segur によるいわゆる AKNS hierarchy [1] は, 上の $U(k;x,t)$, $V(k;x,t)$ がスペクトルパラメーターに関する (負巾も許した) 行列係数の多項式で与えられるソリトン方程式の系列である. この hierarchy は nonlinear Schrödinger 方程式, sine-Gordon 方程式などといった物理的にも重要な方程式に対する統一的な視点という意味で重要な概念であるが, もちろん全てのソリトン方程式を含んでいるわけではない. 非線形光学などの物理現象のモデル化に際して現れる方程式の中にも, AKNS 的ではないソリトン方程式の例を見つけることができる.

一方, ソリトン方程式をグラスマン多様体上の力学系と見なす立場 [2]–[5] からいうと, AKNS hierarchy は 多成分戸田格子 hierarchy の reduction としてとらえることができる [5]. そして, そのように考えると, 多ソリトン解を含むある種の特殊解を (逆散乱を用いないという意味で) 初等的な計算によって構成することが可能となる. 一般に hierarchy の解空間全体は無限次元の多様体となるが, 多ソリトン解のそれはその有限次元の部分空間であるので, 有限サイズの行列の計算でことが足りるのである. KP hierarchy に対するこの意味での有限次元版は上野喜三雄氏によって Grassmann hierarchy と命名された [4]. また, 戸田格子 hierarchy 及びその reduction である AKNS hierarchy に対しても, 同様の手法で Wronskian 型の解を構成できることが知られている [5].

* e-mail address: kakei@mmm.t.u-tokyo.ac.jp

ここではこの考え方を拡張し, ある種の AKNS 的でない方程式に対して, Wronskian 型の解の構成法を与える [13]. 一例として, 次のような線形方程式系から得られる方程式を考えよう;

$$\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{\Psi}(k;x,y) = \frac{\boldsymbol{U}(x,y)}{k-1}\boldsymbol{\Psi}(k;x,y), \tag{1.1a}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{\Psi}(k;x,y) = \frac{\boldsymbol{V}(x,y)}{k+1}\boldsymbol{\Psi}(k;x,y). \tag{1.1b}$$

この 2 式の両立条件からは, 次の principal chiral field 方程式が導かれる [7].

$$\left(J_x J^{-1}\right)_y + \left(J_y J^{-1}\right)_x = 0. \tag{1.2}$$

ここで, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, J は $SU(2)$ に値をとる x, y の関数である. このようなタイプの方程式を扱うために, 戸田格子 hierarchy に対して, さらに新しい “時間変数” を導入することを考えていく.

以下ではまず通常の戸田格子 hierarchy の場合から始めて, 新しい変数をどのように導入するかを述べていく. その後に principal chiral field, Maxwell-Bloch 等の方程式を例として, ソリトン解の構成法を示す.

2 2成分戸田格子 hierarchy の Wronskian 解

まず 2 成分戸田格子 hierarchy の場合に, どのようにして Wronskian 型 (より正確には double Wronskian 型 [6]) の解が構成されたかを復習しておく [5].

次のような差分作用素 $\boldsymbol{W}_N(s)$ を考えよう;

$$\boldsymbol{W}_N(s) = \hat{s}^N + \boldsymbol{w}_1(s)\hat{s}^{N-1} + \boldsymbol{w}_2(s)\hat{s}^{N-2} + \cdots + \boldsymbol{w}_N(s). \tag{2.3}$$

ここで, $\boldsymbol{w}_j(s)$ は 2×2 行列, $\hat{s}$ は離散変数 s に関する shift operator である ;

$$\hat{s}f(s) = \exp(\frac{\partial}{\partial s})\cdot f(s) = f(s+1).$$

この $\boldsymbol{W}_N(s)$ に対して, $\boldsymbol{W}_N(s)\boldsymbol{f}_j(s) = 0$ をみたす $\boldsymbol{f}_j(s) = \begin{pmatrix} f_j(s) \\ g_j(s) \end{pmatrix}$ を $2N$ 個与えれば, 線形方程式を解くことにより, $\boldsymbol{W}_N(s)$ 中の各 $\boldsymbol{w}_j(s)$ の成分はそれらから決まってしまう. より具体的には, $\boldsymbol{w}_j(s)$ の (m,n) 成分を $w_j^{(mn)}(s)$ と表すと,

$$w_j^{(11)}(s) = (-)^j \frac{|0,1,\cdots,N-j-1,N-j+1,\cdots,N\,;\,0,1,\cdots,N-1|}{|0,1,\cdots,N-1\,;\,0,1,\cdots,N-1|}, \tag{2.4a}$$

$$w_j^{(12)}(s) = (-)^{N+j+1}\frac{|0,1,\cdots,N\,;\,0,1,\cdots,N-j-1,N-j+1,\cdots,N-1|}{|0,1,\cdots,N-1\,;\,0,1,\cdots,N-1|}, \tag{2.4b}$$

$$w_j^{(21)}(s) = (-)^{N+j}\frac{|0,1,\cdots,N-j-1,N-j+1,\cdots,N-1\,;\,0,1,\cdots,N|}{|0,1,\cdots,N-1\,;\,0,1,\cdots,N-1|}, \tag{2.4c}$$

$$w_j^{(22)}(s) = (-)^{j}\frac{|0,1,\cdots,N-1\,;\,0,1,\cdots,N-j-1,N-j+1,\cdots,N|}{|0,1,\cdots,N-1\,;\,0,1,\cdots,N-1|}. \tag{2.4d}$$

ただし, 次の記法を用いた;

$$\begin{aligned}&|m_1,m_2,\cdots,m_{N-i};n_1,n_2,\cdots,n_{N+i}|\\ &= \begin{vmatrix} \hat{s}^{m_1}f_1 & \cdots & \hat{s}^{m_{N-i}}f_1 & \hat{s}^{n_1}g_1 & \cdots & \hat{s}^{n_{N+i}}g_1 \\ \hat{s}^{m_1}f_2 & \cdots & \hat{s}^{m_{N-i}}f_2 & \hat{s}^{n_1}g_2 & \cdots & \hat{s}^{n_{N+i}}g_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{s}^{m_1}f_{2N} & \cdots & \hat{s}^{m_{N-i}}f_{2N} & \hat{s}^{n_1}g_{2N} & \cdots & \hat{s}^{n_{m+i}}g_{2N} \end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

上の $\boldsymbol{f}_j(s)$ に対して次のように (x,y) 依存性を入れよう $(a=1,2)$;

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j(s;x,y)}{\partial x_n^{(a)}} &= \delta_{1,a}f_j(s+n;x,y), & \frac{\partial f_j(s;x,y)}{\partial y_n^{(a)}} &= \delta_{1,a}f_j(s-n;x,y), \\ \frac{\partial g_j(s;x,y)}{\partial x_n^{(a)}} &= \delta_{2,a}g_j(s+n;x,y), & \frac{\partial g_j(s;x,y)}{\partial y_n^{(a)}} &= \delta_{2,a}g_j(s-n;x,y). \end{aligned} \tag{2.6}$$

このように $\boldsymbol{f}_j(s)$ に対する (x,y) 依存性を導入すると, それに伴い $\boldsymbol{W}_N(s)$ にも (x,y) 依存性が入り, (差分作用素の割算定理を用いると)$\boldsymbol{W}_N(s;x,y)$ が次の形の微分方程式に従うことが示される;

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}_N(s;x,y)}{\partial x_n^{(a)}} = \boldsymbol{B}_n^{(a)}(s;x,y)\boldsymbol{W}_N(s;x,y) - \boldsymbol{W}_N(s;x,y)\boldsymbol{E}_a\hat{s}^n, \tag{2.7a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}_N(s;x,y)}{\partial y_n^{(a)}} = \boldsymbol{C}_n^{(a)}(s;x,y)\boldsymbol{W}_N(s;x,y) - \boldsymbol{W}_N(s;x,y)\boldsymbol{E}_a\hat{s}^{-n}. \tag{2.7b}$$

ここで $\boldsymbol{E}_a = (\delta_{ij}\delta_{ia})_{i,j=1,2}$ であり, $\boldsymbol{B}_n^{(a)}(s;x,y)$, $\boldsymbol{C}_n^{(a)}(s;x,y)$ は次のようにして $\boldsymbol{W}_N(s;x,y)$ から構成される;

$$\boldsymbol{B}_n^{(a)}(s;x,y) = \Big((\boldsymbol{W}_N(s;x,y)\hat{s}^{-N})\boldsymbol{E}_a\hat{s}^n(\boldsymbol{W}_N(s;x,y)\hat{s}^{-N})^{-1}\Big)_+, \tag{2.8a}$$

$$\boldsymbol{C}_n^{(a)}(s;x,y) = \Big(\boldsymbol{W}_N(s;x,y)\boldsymbol{E}_a\hat{s}^{-n}\boldsymbol{W}_N(s;x,y)^{-1}\Big)_-. \tag{2.8b}$$

ただし $(\,\cdot\,)_+$ は $\hat{s}$ に関する非負巾部分, $(\,\cdot\,)_-$ は非正巾部分を表すものとする (この記法は [5] のものと多少異なる. [5] では $(\,\cdot\,)_-$ は負巾部分を表すものとして用いられている.)

具体的な方程式を得るには, 方程式系 (2.5) の両立条件から得られる, 一連の Zakharov-Shabat 型の方程式を考えればよい. 特に $x_1 = x_1^{(1)} - x_1^{(2)}$, $x_2 = x_2^{(1)} - x_2^{(2)}$ に注目すると,

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}_1(s;x,y)}{\partial x_2} - \frac{\partial \boldsymbol{B}_2(s;x,y)}{\partial x_1} = [\,\boldsymbol{B}_2(s;x,y)\,,\,\boldsymbol{B}_1(s;x,y)\,] \tag{2.9}$$

となる．ここで, $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_1^{(1)}-\boldsymbol{B}_1^{(2)}$, $\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{B}_2^{(1)}-\boldsymbol{B}_2^{(2)}$ とおいた．定義によりこれらはそれぞれ１階および２階の差分作用素であり, その係数は離散変数 s に依存する．しかし, 適当な仮定の下でこの s 依存性はなくなり, これらを "スペクトルパラメーター" λ の多項式と同一視することができる．さらに, この仮定の下では $\boldsymbol{w}_1$ の非対角項および $\boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{w}_3$, $\cdots$ の各成分が全て $w_1^{(12)}$, $w_1^{(12)}$ とそれらの微分によって表される．このことに注意すると, $\boldsymbol{B}_1(\lambda)$, $\boldsymbol{B}_2(\lambda)$ は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}_1(\lambda) &= \begin{pmatrix} 0 & -2w_1^{(12)} \\ 2w_1^{(21)} & 0 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{B}_2(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix} 0 & -2w_1^{(12)} \\ 2w_1^{(21)} & 0 \end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix} 2w_1^{(12)}w_1^{(21)} & \partial_{x_1}w_1^{(12)} \\ \partial_{x_1}w_1^{(21)} & -w_1^{(21)}w_1^{(12)} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

と書くことができる．ここで, $E=-2w_1^{(12)}$, $E^*=-2w_1^{(21)}$ として E, E^* を定義し, $L(\lambda)=\boldsymbol{B}_1(\lambda)$, $A_{NLS}(\lambda)=\mathrm{i}\boldsymbol{B}_2(\lambda)$ とおけば,

$$
L(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E^* & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.10a}
$$

$$
A_{NLS}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathrm{i}\lambda^2+\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E^* & 0 \end{pmatrix}\mathrm{i}\lambda+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i}EE^* & \mathrm{i}\partial_{x_1}E \\ \mathrm{i}\partial_{x_1}E^* & -\mathrm{i}EE^* \end{pmatrix}, \tag{2.10b}
$$

となる．結局,

$$
\frac{\partial L(\lambda)}{\partial z}-\frac{\partial A_{NLS}(\lambda)}{\partial t}=[A_{NLS}(\lambda),L(\lambda)] \tag{2.11}
$$

より, $E(z,t)$ が nonlinear Schrödinger 方程式

$$
\mathrm{i}E_z+\frac{1}{2}E_{tt}+|E|^2E=0
$$

を満たすことがわかる．このように, 2 成分戸田格子 hierarchy において s 依存性を消すという reduction を考えると AKNS hierarchy が得られる．このことは, AKNS hierarchy に含まれる方程式の解が (2.2) のように double Wronskian で表されるということを意味している．

ここまでは通常の戸田格子 hierarchy の話であるが, この hierarchy に対して, 新たに "多極的な" 時間発展を導入しよう．そのために, まず新たな離散変数 s_α, およびそれに関する shift operator $\hat{s}_\alpha$ を考える．差分作用素 $\boldsymbol{W}_N^{[\alpha]}(s_\alpha)$ を

$$
\boldsymbol{W}_N^{[\alpha]}(s_\alpha)=\hat{s}_\alpha^N+\boldsymbol{w}_1^{[\alpha]}(s_\alpha)\hat{s}_\alpha^{N-1}+\boldsymbol{w}_2^{[\alpha]}(s_\alpha)\hat{s}_\alpha^{N-2}+\cdots+\boldsymbol{w}_N^{[\alpha]}(s_\alpha)
$$

と定めると, 前節と同様の議論により $\boldsymbol{W}_N^{[\alpha]}(s_\alpha;x^{[\alpha]},y^{[\alpha]})$ は次の微分方程式に従うことがわかる ($x^{[\alpha]}$, $y^{[\alpha]}$ は s_α に付随した時間変数) ;

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{W}_N^{[\alpha]}(s_\alpha;x^{[\alpha]},y^{[\alpha]})}{\partial x_n^{[\alpha](a)}} \\ &= \boldsymbol{B}_n^{[\alpha](a)}(s_\alpha;x^{[\alpha]},y^{[\alpha]})\boldsymbol{W}_N^{[\alpha]}(s_\alpha;x^{[\alpha]},y^{[\alpha]}) - \boldsymbol{W}_N^{[\alpha]}(s_\alpha;x^{[\alpha]},y^{[\alpha]})\boldsymbol{E}_a\hat{s}_\alpha^n, \quad (2.12\text{a})\\ \frac{\partial \boldsymbol{W}_N^{[\alpha]}(s_\alpha;x^{[\alpha]},y^{[\alpha]})}{\partial y_n^{[\alpha](a)}} \\ &= \boldsymbol{C}_n^{[\alpha](a)}(s_\alpha;x^{[\alpha]},y^{[\alpha]})\boldsymbol{W}_N^{[\alpha]}(s_\alpha;x^{[\alpha]},y^{[\alpha]}) - \boldsymbol{W}_N^{[\alpha]}(s_\alpha;x^{[\alpha]},y^{[\alpha]})\boldsymbol{E}_a\hat{s}_\alpha^{-n}. \quad (2.12\text{b})\end{aligned}$$

ここで, $\boldsymbol{B}_n^{(\alpha)}(s_\alpha;x^{[\alpha]},y^{[\alpha]})$, $\boldsymbol{C}_n^{(\alpha)}(s_\alpha;x^{[\alpha]},y^{[\alpha]})$ は (2.6) と同様にして定められる;

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_n^{[\alpha](a)}(s_\alpha;x^{[\alpha]},y^{[\alpha]}) \\ &= \Big((\boldsymbol{W}_N^{[\alpha]}(s_\alpha;x^{[\alpha]},y^{[\alpha]})\hat{s}_\alpha^{-N})\boldsymbol{E}_a\hat{s}_\alpha^n(\boldsymbol{W}_N^{[\alpha]}(s_\alpha;x^{[\alpha]},y^{[\alpha]})\hat{s}_\alpha^{-N})^{-1}\Big)_+^{[\alpha]}, \quad (2.13\text{a})\\ \boldsymbol{C}_n^{[\alpha](a)}(s_\alpha;x^{[\alpha]},y^{[\alpha]}) \\ &= \Big(\boldsymbol{W}_N^{[\alpha]}(s_\alpha;x^{[\alpha]},y^{[\alpha]})\boldsymbol{E}_a\hat{s}_\alpha^{-n}\boldsymbol{W}_N^{[\alpha]}(s_\alpha;x^{[\alpha]},y^{[\alpha]})^{-1}\Big)_-^{[\alpha]}. \quad (2.13\text{b})\end{aligned}$$

ただし $(\,\cdot\,)_+^{[\alpha]}$, $(\,\cdot\,)_-^{[\alpha]}$ は, それぞれ $\hat{s}_\alpha$ に関する非負巾部分, 非正巾部分を表すものとする.

これだけでは $\boldsymbol{W}_N(s;x,y)$ とは独立に $\boldsymbol{W}_N^{[\alpha]}(s_\alpha;x^{[\alpha]},y^{[\alpha]})$ を考えたにすぎない. しかし今, s, s_α の 2 変数関数の空間を考えると, $\boldsymbol{W}_N$ と $\boldsymbol{W}_N^{[\alpha]}$ とを同一の空間に作用する差分作用素とみなすことができる. さらに, この空間のうち

$$\boldsymbol{f}(s,s_\alpha+1) = \boldsymbol{f}(s+1,s_\alpha) - \alpha\boldsymbol{f}(s,s_\alpha) \qquad (2.14)$$

という条件を満たす元からなる部分空間の上では,

$$\boldsymbol{w}_j^{[\alpha]} = \begin{pmatrix} N \\ j \end{pmatrix} \alpha^j + \sum_{l=1}^{j} \begin{pmatrix} N-l \\ j-l \end{pmatrix} \alpha^{j-l}\boldsymbol{w}_l$$

とおくことにより $\boldsymbol{W}_N$ と $\boldsymbol{W}_N^{[\alpha]}$ とが同一視される. この同一視の下では $\boldsymbol{B}_j$, $\boldsymbol{C}_j$ 達の間だけでなく, $\boldsymbol{B}_j^{[\alpha]}$, $\boldsymbol{C}_j^{[\alpha]}$ も含めた差分作用素達の間に Zakharov-Shabat 型の方程式が成立する. 次節ではこのことを利用して principal chiral field 方程式のソリトン解を構成していこう.

3 Principal chiral field 方程式

前節においては離散変数が s と s_α の二つの場合を考えたが, ここでは s, s_+, s_- の三つの場合を考える. ただし, s_+, s_- それぞれは,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}(s,s_++1,s_-) &= \boldsymbol{f}(s+1,s_+,s_-)+\mathrm{i}\boldsymbol{f}(s,s_+,s_-), \quad &(3.15\mathrm{a}) \\ \boldsymbol{f}(s,s_+,s_-+1) &= \boldsymbol{f}(s+1,s_+,s_-)-\mathrm{i}\boldsymbol{f}(s,s_+,s_-), \quad &(3.15\mathrm{b}) \end{aligned}$$

によって s と結び付いているものとする. このとき, $\boldsymbol{W}_N$ は次の方程式に従うことがわかる;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{W}_N}{\partial y_n^{[+](a)}} &= \boldsymbol{C}_n^{[+](a)}\boldsymbol{W}_N-\boldsymbol{W}_N\boldsymbol{E}_a\hat{s}_+^{-n}, \quad &(3.16\mathrm{a}) \\ \frac{\partial \boldsymbol{W}_N}{\partial y_n^{[-](a)}} &= \boldsymbol{C}_n^{[-](a)}\boldsymbol{W}_N-\boldsymbol{W}_N\boldsymbol{E}_a\hat{s}_-^{-n}, \quad &(3.16\mathrm{b}) \end{aligned}$$

ただし $y_n^{[+](a)}$,$y_n^{[-](a)}$ は, それぞれ s_+, s_- に付随した時間変数である.

ここで, $\boldsymbol{\Phi}(s,s_-,s_+;x,y^{[-]},y^{[+]};\lambda)$ を

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\Phi}(s,s_-,s_+;x,y^{[-]},y^{[+]};\lambda) \\ &\quad = \lambda^s(\lambda-\mathrm{i})^{s_-}(\lambda+\mathrm{i})^{s_+}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\xi(x^{(1)},y^{[-](1)},y^{[+](1)};\lambda)} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\xi(x^{(2)},y^{[-](2)},y^{[+](2)};\lambda)} \end{pmatrix}, \\ &\xi(x^{(a)},y^{[-](a)},y^{[+](a)};\lambda) \\ &\quad = \sum_{j=1}^{\infty}\left(x_j^{(a)}\lambda^j+y_j^{[-](a)}(\lambda-\mathrm{i})^{-j}+y_j^{[+](a)}(\lambda+\mathrm{i})^{-j}\right) \qquad (a=1,2) \end{aligned}$$

により定めると, $\boldsymbol{\Phi}(s,s_-,s_+;x,y^{[-]},y^{[+]})$ の各成分は条件 (3.1) を満たす. さらに $\widetilde{\boldsymbol{W}}_N=\boldsymbol{W}_N\boldsymbol{\Phi}$ とおくと, $\widetilde{\boldsymbol{W}}_N$ は次の方程式を満たすことが示される;

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial y_1^{[+](1)}}-\frac{\partial}{\partial y_1^{[+](2)}}\right)\widetilde{\boldsymbol{W}}_N &= \left(\boldsymbol{C}_1^{[+](1)}-\boldsymbol{C}_1^{[+](2)}\right)\widetilde{\boldsymbol{W}}_N, \quad &(3.17\mathrm{a}) \\ \left(\frac{\partial}{\partial y_1^{[-](1)}}-\frac{\partial}{\partial y_1^{[-](2)}}\right)\widetilde{\boldsymbol{W}}_N &= \left(\boldsymbol{C}_1^{[-](1)}-\boldsymbol{C}_1^{[-](2)}\right)\widetilde{\boldsymbol{W}}_N. \quad &(3.17\mathrm{b}) \end{aligned}$$

2 成分戸田格子 hierarchy から AKNS hierarchy への reduction の際と同様に, ここに条件 $[\boldsymbol{W}_N,\hat{s}]=0$ を要請することにより差分作用素 $\boldsymbol{C}_1^{[\pm](a)}$ はスペクトルパラメター λ の関数と同一視される. また, その条件の下で

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\boldsymbol{U}\hat{s}_-^{-1} &= \boldsymbol{C}_1^{[-](1)}-\boldsymbol{C}_1^{[-](2)}, &\qquad \mathrm{i}\boldsymbol{V}\hat{s}_+^{-1} &= \boldsymbol{C}_1^{[+](1)}-\boldsymbol{C}_1^{[+](2)}, \\ x &= \frac{y_1^{[-](1)}-y_1^{[-](2)}}{2}, &\qquad y &= \frac{y_1^{[+](1)}-y_1^{[+](2)}}{2}, \end{aligned}$$

とおけば,

$$\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{\boldsymbol{W}}_N(x,y;\lambda) = \frac{\boldsymbol{U}(x,y)}{-\mathrm{i}\lambda-1}\widetilde{\boldsymbol{W}}_N(x,y;\lambda), \tag{3.18a}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\widetilde{\boldsymbol{W}}_N(x,y;\lambda) = \frac{\boldsymbol{V}(x,y)}{-\mathrm{i}\lambda+1}\widetilde{\boldsymbol{W}}_N(x,y;\lambda), \tag{3.18b}$$

を得る. この式で $\boldsymbol{\Psi}=\widetilde{\boldsymbol{W}}_N$, $k=-\mathrm{i}\lambda$ とおけば (1.1) 式と一致する. (1.2) 式の $J(x,y)$ を得るために, まず (1.1) 式の両立条件を計算しておこう;

$$\boldsymbol{U}_y-\boldsymbol{V}_x = 0, \tag{3.19a}$$

$$\boldsymbol{U}_y+\boldsymbol{V}_x = [\,\boldsymbol{V}\,,\,\boldsymbol{U}\,]. \tag{3.19b}$$

一方, $\boldsymbol{W}_N$ が (2.3) 式の形をしていることに注意すると, (3.4) 式より次のことがわかる;

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\lambda^s}\widetilde{\boldsymbol{W}}_N\right]_{\lambda=0} = -\boldsymbol{U}\left[\frac{1}{\lambda^s}\widetilde{\boldsymbol{W}}_N\right]_{\lambda=0}, \tag{3.20a}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\lambda^s}\widetilde{\boldsymbol{W}}_N\right]_{\lambda=0} = \boldsymbol{V}\left[\frac{1}{\lambda^s}\widetilde{\boldsymbol{W}}_N\right]_{\lambda=0}. \tag{3.20b}$$

よって, (3.5), (3.6) より

$$J(x,y)=\left[\frac{1}{\lambda^s}\widetilde{\boldsymbol{W}}_N(x,y;\lambda)\right]_{\lambda=0}$$

が (1.2) 式を満たすことがわかる.

ソリトン解を得るためには, f_j,g_j の具体形として

$$\begin{aligned}
&f_j(s,s_+,s_-;x,y,x^{[+]},y^{[+]},x^{[+]},y^{[-]})\\
&= a_jq_j^s\exp\left(x_l^{(1)}q^l+y_l^{(1)}q^{-l}\right)\\
&\qquad\times(q_j+\mathrm{i})^{s_+}\exp\left(x_l^{[+](1)}(q_j+\mathrm{i})^l+y_l^{[+](1)}(q_j+\mathrm{i})^{-l}\right)\\
&\qquad\times(q_j-\mathrm{i})^{s_-}\exp\left(x_l^{[-](1)}(q_j-\mathrm{i})^l+y_l^{[-](1)}(q_j-\mathrm{i})^{-l}\right),
\end{aligned} \tag{3.21a}$$

$$\begin{aligned}
&g_j(s,s_+,s_-;x,y,x^{[+]},y^{[+]},x^{[+]},y^{[-]})\\
&= b_jq_j^s\exp\left(x_l^{(2)}q^l+y_l^{(2)}q^{-l}\right)\\
&\qquad\times(q_j+\mathrm{i})^{s_+}\exp\left(x_l^{[+](2)}(q_j+\mathrm{i})^l+y_l^{[+](2)}(q_j+\mathrm{i})^{-l}\right)\\
&\qquad\times(q_j-\mathrm{i})^{s_-}\exp\left(x_l^{[-](2)}(q_j-\mathrm{i})^l+y_l^{[-](2)}(q_j-\mathrm{i})^{-l}\right),
\end{aligned} \tag{3.21b}$$

を選べばよい. すなわち, この f_j, g_j に対する $\boldsymbol{W}_N$ から N ソリトン解が得られる. $N=1$ の場合の $J(x,y)$ を構成すると,

$$J(x,y) = \frac{1}{|0;0|}\begin{pmatrix} |1;0| & |0,1;\,| \\ -|;0,1| & |0;1| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)+\theta} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-y)-\theta} \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

$$= \quad \frac{1}{1-\frac{b_1a_2}{a_1b_2}\mathrm{e}^{\phi_1-\phi_2}}\begin{pmatrix} q_1-\frac{b_1a_2}{a_1b_2}q_2\mathrm{e}^{\phi_1-\phi_2} & (q_2-q_1)\frac{a_2}{b_2}\mathrm{e}^{-\phi_2} \\ (q_1-q_2)\frac{b_1}{a_1}\mathrm{e}^{\phi_1} & q_2-\frac{b_1a_2}{a_1b_2}q_1\mathrm{e}^{\phi_1-\phi_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)+\theta} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-y)-\theta} \end{pmatrix}$$

(θ は任意定数) となる. ただし $\phi_j(x,y)$ は

$$\phi_j(x,y) = \frac{x}{q_j-\mathrm{i}} + \frac{y}{q_j+\mathrm{i}} + \phi_j^{(0)}$$

で与えられる ($\phi_j^{(0)}$ は x, y に依存しない定数). この解は既に知られている 1 ソリトン解に一致する [7][8].

このソリトン解を表す $J(x,y)$ が $SU(2)$ に属するようにするためには, (3.6) におけるパラメーター q_j, a_j, b_j に対して,

$$q_{N+j} = -q_j^*, \quad b_j = a_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}, \quad b_{N+j} = -a_{N+j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}, \qquad (j=1,2,\cdots,N) \tag{3.23}$$

という条件をおいておけばよい. さらに, x_j, y_j は j が奇数のときは実数, 偶数のときは純虚数とする. この要請の下では, $\boldsymbol{w}_j$ の各成分の間に

$$w_j^{(11)*} = (-1)^j w_j^{(22)}, \quad w_j^{(12)*} = (-1)^{j+1} w_j^{(21)} \qquad (j=1,2,\cdots,N)$$

という関係が成り立つ [13]. 1 ソリトン解の場合は, このことと, double Wronskian の満たす双線形方程式

$$|1;0||0;1| \ + \ |0,1;||;0,1| \ + \ |q|^2|0;0||0;0| \ = \ 0$$

から, 適当に定数倍することにより上の $J(x,y)$ は $SU(2)$ の元となる. (この双線形方程式はプリュッカー関係式の一つに他ならない. ただし, $|1;1| = |q|^2|0;0|$ を用いる.) ここでは 1 ソリトン解を例にとって述べたが, N ソリトン解を表す $J(x,y)$ に対しても, 要請 (3.23) の下で $SU(2)$ 条件を満たすことが証明される.

さらに q_j が実数であることを要請すると $J^2 = I$ となり, $J(x,y)$ は次のように Pauli matrix で展開される;

$$J(x,y) = n^1(x,y)\sigma_1 + n^2(x,y)\sigma_2 + n^3(x,y)\sigma_3.$$

ここで $n^1(x,y)$, $n^2(x,y)$, $n^3(x,y)$ は全て実数に値をとる. $J(x,y)$ が (1.2) を満たすことから, この展開係数 $\vec{n} = (n^1,n^2,n^3)$ は, 次の nonlinear $O(3)$ sigma model の運動方程式を満足することが示される [9];

$$\partial_T^2\vec{n} - \partial_X^2\vec{n} + \left((\partial_T\vec{n})^2 - (\partial_X\vec{n})^2\right)\vec{n} = 0, \qquad \vec{n}^2 = 1.$$

ただし, $T = x + y$, $X = x - y$ である.

1 ソリトン解 (3.22) をこのように書き直してみると,

$$n^1 = \mathrm{sech}\left(\frac{q}{q^2+1}T\right)\cos\left(\frac{1}{q^2+1}X\right), \tag{3.24a}$$

$$n^2 = \mathrm{sech}\left(\frac{q}{q^2+1}T\right)\sin\left(\frac{1}{q^2+1}X\right), \tag{3.24b}$$

$$n^1 = \tanh\left(\frac{q}{q^2+1}T\right), \tag{3.24c}$$

となる. しかし, この解は作用が有限であるという物理的な要請を満たさない. 有限作用解はインスタントン解で尽きていることが知られているが [10], このように $SU(2)$ chiral field の Wronskian 解から出発してインスタントン解を捉えることも今後の課題の一つである.

4 Maxwell-Bloch 方程式

この節では 2 節で導入した方法によって取り扱うことのできる方程式の例をもう一つあげる.

現実の物理系における光ソリトンの形成機構として, 2 次の分散の効果と Karr 効果による 3 次の非線形性との間のバランス (Nonlinear Schrödinger 方程式で記述される) 以外に, 共鳴媒質の効果による「自己誘導透過 (Self-Induced Transparency)」と呼ばれる現象が知られている. その現象は次の Maxwell-Bloch 方程式で記述される [11];

$$\begin{cases} E_z = 2\langle p\rangle, \\ p_t = 2\mathrm{i}\alpha p + 2E\eta, \\ \eta_t = -(Ep^* + E^*p). \end{cases} \tag{4.25}$$

ここで, $\langle p\rangle$ は共鳴周波数の不均一な広がりに関する平均化を表す;

$$\langle p(z,t;\alpha)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(z,t;\alpha)g(\alpha)d\alpha, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)d\alpha = 1.$$

(4.25) 式は次の Zakharov-Shabat 型の方程式より得られる;

$$\frac{\partial L(\lambda)}{\partial z} - \frac{\partial A_{MB}(\lambda)}{\partial t} = [A_{MB}(\lambda), L(\lambda)]. \tag{4.26}$$

ただし $L(\lambda)$, $A_{MB}(\lambda)$ は次式で与えられるものとする;

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E^* & 0 \end{pmatrix} \left(= \boldsymbol{B}_1(\lambda)\right), \tag{4.27a}$$

$$A_{MB}(\lambda) \;=\; \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\eta}{\lambda-\mathrm{i}\alpha} \right\rangle & \left\langle \frac{-p}{\lambda-\mathrm{i}\alpha} \right\rangle \\ \left\langle \frac{-p^*}{\lambda-\mathrm{i}\alpha} \right\rangle & \left\langle \frac{-\eta}{\lambda-\mathrm{i}\alpha} \right\rangle \end{pmatrix}. \tag{4.27b}$$

この方程式の複雑さは $\langle \cdot \rangle$ という積分に起因する. 今, この積分を次のように有限和で置き換えて考えよう;

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\alpha)g(\alpha)d\alpha \quad \longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{m} p(\alpha)g(\alpha_k).$$

このとき (4.27b) 式の $A_{MB}(\lambda)$ は

$$\begin{aligned} A_{MB}(\lambda) &= \sum_{k=1}^{m} \frac{g(\alpha_k)}{\lambda - \mathrm{i}\alpha_k} \begin{pmatrix} \eta(\alpha_k) & -p(\alpha_k) \\ -p^*(\alpha_k) & -\eta(\alpha_k) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^{m} g(\alpha_k) \boldsymbol{C}_1^{[\alpha_k]}(\lambda) \end{aligned}$$

と書き換えられる. また, それに伴って変数 z も

$$\frac{\partial}{\partial z} = \sum_{k=1}^{m} g(\alpha_k) \frac{\partial}{\partial y_1^{[\alpha_k]}}$$

を満たすように多変数化する. すると (4.26) 式は分解され,

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}_1(\lambda)}{\partial y_1^{[\alpha_k]}} - \frac{\partial \boldsymbol{C}_1^{[\alpha_k]}(\lambda)}{\partial x_1} = \left[\boldsymbol{C}_1^{[\alpha_k]}(\lambda) \, , \, \boldsymbol{B}_1(\lambda) \right]$$

という方程式を各 α_k $(k = 1, 2, \cdots, m)$ ごとに考えればよいことになる. これは (2.10) の両立条件から得られる Zakharov-Shabat 型の方程式に reduction を施したものに他ならない. このことから, この方程式が (double) Wronskian 型の解を持つことがわかる.

Wronskian を用いてソリトン解を構成するには, 前節と同様に f_j, g_j として次のような指数関数を選んでやればよい;

$$\begin{aligned} & f_j(s, s_{\alpha_1}, \cdots, s_{\alpha_m}; x, y, x^{[\alpha_1]}, y^{[\alpha_1]}, \cdots, x^{[\alpha_m]}, y^{[\alpha_m]}) \\ &\quad = \; a_j q_j^s \exp\left(x_l^{(1)} q^l + y_l^{(1)} q^{-l} \right) \\ &\qquad\qquad \times \prod_{k=1}^{m} \left\{ (q_j - \mathrm{i}\alpha_k)^{s_{\alpha_k}} \exp\left(x_l^{[\alpha_k](1)} (q_j - \mathrm{i}\alpha_k)^l + y_l^{[\alpha_k](1)} (q_j - \mathrm{i}\alpha_k)^{-l} \right) \right\}, \end{aligned} \tag{4.28a}$$

$$\begin{aligned} & g_j(s, s_{\alpha_1}, \cdots, s_{\alpha_m}; x, y, x^{[\alpha_1]}, y^{[\alpha_1]}, \cdots, x^{[\alpha_m]}, y^{[\alpha_m]}) \\ &\quad = \; b_j q_j^s \exp\left(x_l^{(2)} q^l + y_l^{(2)} q^{-l} \right) \\ &\qquad\qquad \times \prod_{k=1}^{m} \left\{ (q_j - \mathrm{i}\alpha_k)^{s_{\alpha_k}} \exp\left(x_l^{[\alpha_k](2)} (q_j - \mathrm{i}\alpha_k)^l + y_l^{[\alpha_k](2)} (q_j - \mathrm{i}\alpha_k)^{-l} \right) \right\}. \end{aligned} \tag{4.28b}$$

ただし, 複素共役の関係を満足するように, 条件 (3.23) を要請しておく.

$N=1$ の場合には次のような 1 ソリトン解が得られる;

$$
\begin{aligned}
E(z,t) &= -2\frac{|0,1;|}{|0;0|} \\
&= 2\mu\,\mathrm{sech}\left(\varphi(z,t)\right)\exp\left(\mathrm{i}\psi(z,t)-\mathrm{i}\theta\right), \\
p(z,t;\alpha) &= \frac{-2|1;0|^{[\alpha]}|0,1;|^{[\alpha]}}{|1;0|^{[\alpha]}|0;1|^{[\alpha]}+|0,1;|^{[\alpha]}|;0,1|^{[\alpha]}} \\
&= \frac{2\mu\left\{\mu\sinh\left(\varphi(z,t)\right)+\mathrm{i}(\nu-\alpha)\cosh\left(\varphi(z,t)\right)\right\}\exp\left(\mathrm{i}\psi(z,t)-\mathrm{i}\theta\right)}{\mu^2\sinh^2\left(\varphi(z,t)\right)+(\nu-\alpha)^2\cosh^2\left(\varphi(z,t)\right)+\mu^2/4}, \\
\eta(z,t;\alpha) &= \frac{|1;0|^{[\alpha]}|0;1|^{[\alpha]}-|0,1;|^{[\alpha]}|;0,1|^{[\alpha]}}{|1;0|^{[\alpha]}|0;1|^{[\alpha]}+|0,1;|^{[\alpha]}|;0,1|^{[\alpha]}} \\
&= \frac{\mu^2\sinh^2\left(\varphi(z,t)\right)+(\nu-\alpha)^2\cosh^2\left(\varphi(z,t)\right)-\mu^2/4}{\mu^2\sinh^2\left(\varphi(z,t)\right)+(\nu-\alpha)^2\cosh^2\left(\varphi(z,t)\right)+\mu^2/4}.
\end{aligned}
$$

ここで $|\cdot|^{[\alpha]}$ は (2.5) 式で $\hat{s}$ を $\hat{s}_\alpha$ に置き換えたものである. また, $\varphi(z,t)$, $\psi(z,t)$ は

$$
\begin{aligned}
\varphi(z,t) &= 2\mu t+\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\mu}{\mu^2+(\nu-\alpha)^2}g(\alpha)d\alpha\right)z+\varphi^{(0)}, \\
\psi(z,t) &= 2\nu t-\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2(\nu-\alpha)}{\mu^2+(\nu-\alpha)^2}g(\alpha)d\alpha\right)z+\psi^{(0)},
\end{aligned}
$$

で与えられる. $\varphi^{(0)}$, $\psi^{(0)}$ は z, t に依存しない定数である. この 1 ソリトン解は [11] で逆散乱法により求められているものと一致している.

このように Maxwell-Bloch 方程式を hierarchy の一員としてとらえることの利点の一つとして, hierarchy に含まれる他の方程式との結合系が容易に捉えられることが挙げられる. 例えば nonlinear Schrödinger 方程式と Maxwell-Bloch 方程式との結合系を考えてみよう. この二つの方程式は Lax 形式で書いたときには共通の “$L(\lambda)$” を持つ. そのためにそれぞれの $A(\lambda)$ の線形結合によって時間発展を入れれば両者の結合系が構成される. つまり, (2.10b), (4.27b) 式を用いて

$$
A_{NLSMB}(\lambda)=\tilde{a}_1A_{NLS}(\lambda)+\tilde{a}_2A_{MB}(\lambda)
$$

とおけば,

$$
\frac{\partial L(\lambda)}{\partial z}-\frac{\partial A_{NLSMB}(\lambda)}{\partial t}=[A_{NLSMB}(\lambda),L(\lambda)] \tag{4.29}
$$

から次の方程式が得られる;

$$
\left\{
\begin{aligned}
E_z &= \mathrm{i}\tilde{a}_1\left(\tfrac{1}{2}E_{tt}+|E|^2E\right)+2\tilde{a}_2\langle p\rangle, \\
p_t &= 2\mathrm{i}\alpha p+2E\eta, \\
\eta_t &= -(Ep^*+E^*p).
\end{aligned}
\right. \tag{4.30}
$$

この方程式は, 非線形共鳴媒質中の超短パルスを記述するためのモデル方程式として Maimistov と Manykin により導入されたものである [12].

この方程式に関しても double Wronskian を用いてソリトン解を構成することが可能である. 解の代数的構造としては Maxwell-Bloch 方程式と大差ないが, 実際にソリトン解を構成してみると, その分散関係の違いから振舞いが多少異なってくる. 特に, 多ソリトンの "束縛状態" を考えると, nonlinear Schrödinger 方程式, Maxwell-Bloch 方程式各々一方のみでは起こらない「非対称的に振動するソリトン」が見られる [13].

5　最後に

2 節で新たに導入した時間発展を "多極的" と呼ぶ理由を述べておく [8]. 通常の KP hierarchy における時間発展は

$$\exp(kx_1 + k^2 x_2 + k^3 x_3 + \cdots)$$

という形をしているが, この関数は $k = \infty$ に特異性を持っている. 一方, 戸田格子 hierarchy における時間発展は

$$\exp(kx_1 + k^2 x_2 + k^3 x_3 + \cdots + \frac{1}{k} y_1 + \frac{1}{k^2} y_2 + \frac{1}{k^3} y_3 + \cdots)$$

なので, 特異点は $k = 0$ と $k = \infty$ の二箇所である. さらに多くの特異点を導入すれば principal chiral field 等の方程式も取り扱えるというわけである.

KP hierarchy にこのような時間発展を導入することは別に新しいことではなく, アイデア自体は [3] でも述べられている. [5] が, そのような時間発展を持った hierarchy を定式化した最初の例であろう. また, [8] では free fermion を用いてこのタイプの方程式の τ 関数の満たす双線形方程式を導いている. しかし hierarchy 全体を議論するときには Grassmann formalism のほうが見通しがよく, より簡単に高次の方程式を議論できるなどという利点がある. (高次の $\boldsymbol{B}_j$, $\boldsymbol{C}_j$ が $\boldsymbol{W}_N$ から容易に計算される.)

また, (2.12a) 式で導入した $x_n^{[\alpha]}$ は本質的には新しい時間変数ではなく、元々の変数 x_n 達の一次結合で書けてしまう. しかし, (2.12b) 式の $y_n^{[\alpha]}$ を y_n 達で表そうとすると無限和になる. よってここで導入した $y_n^{[\alpha]}$ は, そういった無限和をうまく取り扱うための一つの手法とみなすことができよう.

ここで議論したクラスに属するソリトン方程式の例はもちろんまだ他にもある. 例えば shallow water wave 方程式 [14], integrable ponderomotive system[15] などといった, 物理的にも意味を持つ方程式が挙げられる. これらの方程式を hierarchy の一員として捉えれば,

「より高次の効果を採り入れる」,「他の方程式との結合系を考える」,「2 次元化」などというように, より複雑な物理的効果を厳密かつ統一的に議論できる可能性がある. それらの詳細は現在準備中の論文に譲る.

References

[1] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur: Stud. Appl. Math. **53** (1974) 249.

[2] M. Sato and Y. Sato: In H. Fujita, P. D. Lax, and G. Strang, editors, *Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Science*, p.259, (Kinokuniya/North-Holland, 1982).

[3] 佐藤幹夫: 東京大学における集中講義 (1982)

[4] 上野喜三雄: 数学のあゆみ **28** (1985) 82.

[5] K. Ueno and K. Takasaki: Adv. Stud. Pure Math. **4** (1984) 1.

[6] R. Hirota, Y. Ohta and J. Satsuma: Prog. Theor. Phys. Suppl. **94** (1988) 59.

[7] V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov: Sov. Phys. JETP **47** (1978) 1017.

[8] M. Jimbo and T. Miwa: Publ. RIMS, Kyoto Univ. **19** (1983) 943.

[9] A. G. Bytsko: preprint (hep-th/9403101).

[10] W. D. Garber, S. N. M. Ruijsenaars, E. Seiler and D. Burns: Ann. Phys. **119** (1979) 305.

[11] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup and A. C. Newell: J. Math. Phys. **15** (1974) 1852.

[12] A. I. Maimistov and E. A. Manykin: Sov. Phys. JETP **58** (1983) 685.

[13] S. Kakei and J. Satsuma: J. Phys. Soc. Jpn. **63** (1994) 885.

[14] R. Hirota and J. Satsuma: J. Phys. Soc. Jpn. **40** (1976) 611.

[15] D. J. Kaup: Phys. Rev. Lett. **59** (1987) 2063.