九州大学応用力学研究所 研究集会報告 **11ME-S4** (2000) pp.178-182

結合型 KP ヒエラルキーの代数構造

早稲田大学理工学部数理科学学科　　筧　三郎　(KAKEI, Saburo) *

Abstract

広田・太田により提出された結合型 KP ヒエラルキーが, 2 成分 KP ヒエラルキーの特殊化として捕らえられることを示す. この立場から, 広田・薩摩の結合型 KdV 方程式, およびその一般化がどのように捕らえられるかについても議論する. また, 自由フェルミオンを用いた定式化についても述べる.

1　はじめに

よく知られているように, KP ヒエラルキーにおいてソリトン解等の有限次元の解を考えると, τ-函数は有限サイズの行列式を用いて表される. この立場から見ると, 様々なソリトン方程式は行列式の恒等式 (プリュッカー恒等式) に帰着される. この事実の一つの拡張として, 広田良吾・太田泰広両氏は τ-函数がパフィアンで表される特解を持つようなソリトン方程式の系列を提出し, 「結合型 KP ヒエラルキー」と命名した [HO, H]. 広田・太田の論文では, 広田型の双線形方程式に基づいた議論がなされていて, 方程式の階層全体としての構造には言及されていない. 方程式がラックス形式で表されるか, 無限個の保存量を持つか, などといったことも明らかにされてはいなかった.

一方, 結合型 KP ヒエラルキーが直交・シンプレクティック集団に対する行列積分と関係することが, (筆者を含めた) 数名の研究者により独立に指摘されている [AHM, AM1, AM2, ASM, K1, K3, vdL]. 模型の非摂動論的な性質を議論するには, 結合型 KP ヒエラルキーのより深い理解が必要であろう. 平成 10 年度の研究集会「ソリトン理論の新展開」の報告集 [K3] ではこの立場からの議論を紹介し, 結合型 KP ヒエラルキーが 2 成分 KP ヒエラルキーの特殊化として捕らえられることを述べた. 本論説ではそこでの議論の復習から始めて, 広田・薩摩の KdV 方程式がどのように捕らえられるかについて述べる. また, 自由フェルミオンを用いた定式化についても, 簡単に述べる.

2　結合型 KP ヒエラルキー

本節では, 論文 [K2] の結果を要約する. 用いる手法は, Zakharov-Shabat の “dressing method” [ZS] である. まず, 次の積分演算子 $\boldsymbol{F}$ を考える:

$$\widehat{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{\psi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{F}(x,z)\boldsymbol{\psi}(z)\mathrm{d}z.$$

ただし, 積分核 $\boldsymbol{F}(x,z)$ は 2×2 行列値の函数であり, 微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t_n^{(a)}}\boldsymbol{F}(x,z) - \boldsymbol{E}_a\frac{\partial^n}{\partial x^n}\boldsymbol{F}(x,z) + (-1)^n\frac{\partial^n}{\partial z^n}\boldsymbol{F}(x,z)\boldsymbol{E}_a = 0 \tag{1}$$

* E-mail: kakei@mse.waseda.ac.jp

を満たすことを要請しておく.

次に, この $\boldsymbol{F}(x,z)$ の "Volterra 分解" を考える:

$$(1+\widehat{\boldsymbol{F}}) = (1+\widehat{\boldsymbol{K}}_+)^{-1}(1+\widehat{\boldsymbol{K}}_-).$$

ただし, $\widehat{\boldsymbol{K}}_\pm$ は次のような積分演算子である:

$$\widehat{\boldsymbol{K}}_+\boldsymbol{\psi}(x) = \int_x^\infty \boldsymbol{K}_+(x,z)\boldsymbol{\psi}(z)\mathrm{d}z, \qquad \widehat{\boldsymbol{K}}_-\boldsymbol{\psi}(x) = \int_{-\infty}^x \boldsymbol{K}_-(x,z)\boldsymbol{\psi}(z)\mathrm{d}z.$$

こうして得られる $\widehat{\boldsymbol{K}}_\pm$ で "bare operarors"

$$\frac{\partial}{\partial t_n^{(a)}} - \boldsymbol{E}_a\frac{\partial^n}{\partial x^n}, \qquad (\boldsymbol{E}_a)_{i,j} = \delta_{a,i}\delta_{i,j} \quad (a=1,2) \tag{2}$$

に, 次のようにして「服を着せる」:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_n^{(a)}} - \boldsymbol{B}_n^{(a)}\right)(1+\widehat{\boldsymbol{K}}_\pm) = (1+\widehat{\boldsymbol{K}}_\pm)\left(\frac{\partial}{\partial t_n^{(a)}} - \boldsymbol{E}_a\frac{\partial^n}{\partial x^n}\right).$$

先ほどの要請 (1) により積分演算子 $\widehat{\boldsymbol{F}}$ は bare operarors (2) と可換となるので, 演算子 $\boldsymbol{B}_n^{(a)}$ が積分項を含まないことが分かる. この操作により, 自明でない可換な微分演算子の族が得られる. 可換性の帰結として $\boldsymbol{B}_m^{(a)}$ の係数の満たすべき非線形方程式系が得られるが, それが 2 成分 KP ヒエラルキーである.

次に, 積分核 $\boldsymbol{F}(x,z)$ が以下の対称性を持つことを要請する:

$${}^t\boldsymbol{F}(x,z) = -\boldsymbol{J}\boldsymbol{F}(z,x)\boldsymbol{J}, \qquad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

この要請の下では, $\boldsymbol{F}(x,z)$ の時間発展も制限を受ける. 簡単な計算により $\boldsymbol{F}(x,z)$ は $t_n = \{t_n^{(1)} - (-1)^n t_n^{(2)}\}/2$ のみに依存することが分かる. この t_n に対応して, 次のように $\widehat{\boldsymbol{A}}_n$ を定義しよう:

$$\widehat{\boldsymbol{A}}_n = (1+\widehat{\boldsymbol{K}}_+)\left\{\frac{\partial}{\partial t_n} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\partial_x^n\right\}(1+\widehat{\boldsymbol{K}}_+)^{-1}.$$

特に, $\widehat{\boldsymbol{A}}_2$, $\widehat{\boldsymbol{A}}_3$ の可換性より, 結合型 KP 方程式

$$\begin{aligned}
&(4u_t - uu_x - 12u_{xxx})_x - 3u_{yy} + 12(v\tilde{v})_{xx} = 0,\\
&2v_t + 6uv_x + v_{xxx} + 3v_{xy} + 6v\int^x u_y\mathrm{d}x = 0,\\
&2\tilde{v}_t + 6u\tilde{v}_x + \tilde{v}_{xxx} - 3\tilde{v}_{xy} - 6\tilde{v}\int^x u_y\mathrm{d}x = 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

が得られる (ただし, $x=t_1$, $y=t_2$, $t=t_3$ とした). すなわち, $\widehat{\boldsymbol{A}}_2$, $\widehat{\boldsymbol{A}}_3$ は結合型 KP 方程式に対するラックス対である. また,

$$u = 2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\log\tau, \qquad v = \sigma/\tau, \qquad \bar{v} = \bar{\sigma}/\tau,$$

とおけば, 結合型 KP 方程式 (4) は双線形方程式

$$\begin{aligned}
&(D_1^4 - 4D_1D_3 + 3D_2^2)\tau\cdot\tau = 24\bar{\sigma}\sigma,\\
&(D_1^3 + 2D_3 + 3D_1D_2)\sigma\cdot\tau = 0,\\
&(D_1^3 + 2D_3 - 3D_1D_2)\bar{\sigma}\cdot\tau = 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

に書き直すことができる. ここで D_j は, いわゆる広田の双線形演算子である.

特解を構成するためには, まず (1), (3) を満たす $F(x,z)$ から出発する. 一つの例としては,

$$\boldsymbol{F}(x,z) \;=\; -\boldsymbol{J}\,{}^t\Xi(x)\boldsymbol{C}^{-1}\Xi(z) \tag{6}$$

とすることである. ただし, $\boldsymbol{C}$ は可逆な反対称行列であり, $\Xi(x)$ は

$${}^t\Xi(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_N(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & \cdots & g_N(x) \end{pmatrix}$$

で与える. また, 条件 (1) が満たされるように, 函数 $f_j(x)$, $g_j(z)$ は以下の方程式に従うものとする:

$$\frac{\partial}{\partial x_n} f_i = \frac{\partial^n}{\partial x^n} f_i, \qquad \frac{\partial}{\partial x_n} g_i = (-1)^{n-1}\frac{\partial^n}{\partial x^n} g_i.$$

一般の場合は, $\boldsymbol{F}(x,z)$ に対応する $\boldsymbol{K}_+(x,z)$ を構成するためには, Gelfand-Levitan-Marchenko 方程式と呼ばれる積分方程式を解くことになる. しかし (6) の $\boldsymbol{F}(x,z)$ に対しては, 積分方程式は線形連立方程式に退化し, 容易に解くことができる. さらに, 今の場合は退化した線形方程式の係数行列は反対称となり, 反対称行列の逆行列はパフィアンを用いて表されるので, 積分核 $\boldsymbol{K}_+(x,z)$ のパフィアンによる表示が得られるわけである. こうして得られた結合型 KP ヒエラルキーの特解は, 広田・太田のグラム型パフィアン解 [HO, H] と一致する. このあたりのことについて, より詳しくは [K2] を参照していただきたい.

3　結合型 KdV 方程式への reduction

広田・薩摩は文献 [HS] において, 結合型 KdV 方程式を提出した:

$$4u_t - uu_x - 12u_{xxx} + 24vv_x = 0, \qquad 2v_t + 6uv_x + v_{xxx} = 0.$$

この方程式は, 結合型 KP 方程式 (4) において y - 依存性を無視し, $v = \tilde{v}$ とすることで得られる. これらの要請を積分核 $\boldsymbol{F}(x,z)$ の言葉で言い換えると,

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2)\partial_x^2 \boldsymbol{F}(x,z) = \partial_z^2 \boldsymbol{F}(x,z)(\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2), \\ \boldsymbol{F}(x,z) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{F}(x,z)\boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\end{gathered}$$

となる. この条件を満たす $\boldsymbol{F}(x,z)$ の例としては, (6) において,

$$C_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j-1), \\ -1 & (i = j+1), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases} \qquad \begin{aligned} f_{2k-1}(x,t) &= a_{2k-1}\exp[\xi(x,t;p_k)], \\ f_{2k}(x,t) &= a_{2k}\exp[\xi(x,t;\mathrm{i}p_k)], \\ g_{2k-1}(x,t) &= b_{2k-1}\exp[\xi(x,t;-\mathrm{i}p_k)], \\ g_{2k}(x,t) &= b_{2k}\exp[\xi(x,t;-p_k)], \\ &(k = 1,\ldots,N), \end{aligned} \tag{7}$$

とおき, 更に $b_j = a_j$ $(j = 1,\ldots,2N)$, $t_{4n} = 0$ としてやればよい.

また, Wu らは複素結合型 KdV 方程式

$$4u_t - uu_x - 12u_{xxx} + 12(|v|^2)_x = 0, \qquad 2v_t + 6uv_x + v_{xxx} = 0,$$

を提出した [WGHZ]. これを扱うには, 先ほどの条件 $v = \tilde{v}$ に変えて $\bar{v} = \tilde{v}$ としてやればよい. ここで $\bar{v}$ は v の複素共役を表す. 積分核の言葉で言えば, $\overline{\boldsymbol{F}(x,z)} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{F}(x,z)\boldsymbol{P}$ を要請することに他ならない. この条件を満たす例としては, (7) の $\boldsymbol{C}$, f, g において $\bar{p}_j = \mathrm{i}p_j$, $b_j = \bar{a}_j$ $(j = 1,\ldots,2N)$, $t_{2k-1} \in \mathbb{R}$, $t_{2k} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ $(k = 1,\ldots,N)$ としてやればよい. 以上により, 結合型 KdV 方程式のソリトン解をパフィアンにより表す方法が得られたことになる.

4　自由フェルミオンによる方法

結合型 KP ヒエラルキーはその特殊化として AKP, BKP ヒエラルキーを含むのであるが, このことに関して文献 [H] では次のように述べられている (p. 136, [注 2]).

『結合型 KP 方程式に作用する群 (筆者はカッツ・ムーディ・リー群に含まれると信じる) がどのようなものであるかは全く不明である. 群論の立場では KP 方程式に作用する群 (A 型) がもっとも一般的で, BKP 方程式に作用する群はそれを特殊化したものであると考える. この考えは筆者の観点 (パフィアンの方が行列式より一般的であるとする) と今のところ両立しない.』

こういったことを議論するには, 自由フェルミオンによって定式化すると見通しがよい. 冒頭でも述べたように, 結合型 KP ヒエラルキーと等価な系が数グループにより研究されている. しかしよく調べてみると, このヒエラルキーが最初に扱われたのは論文 [JM] であると思われる. (R. Willox 氏による発見. 本節の内容は, R. Willox 氏との共同研究に基づいている.)

論文 [JM], p. 974 において, 無限次元リー代数 D'_∞ が次のように定義されている:

$$D'_\infty = \left\{ \sum a_{jk} : \psi_j \psi_k^* : + \sum b_{jk} \psi_j \psi_k + \sum c_{jk} \psi_j^* \psi_k^* + d \right\}.$$

この代数から出発すると, 次の「双線形恒等式」が得られる:

$$\begin{aligned}
&\oint \frac{\mathrm{d}k}{2\pi\mathrm{i}k} k^{n-n'-1} \mathrm{e}^{\xi(x-x',k)} \tau_{n'+1}(x' + \epsilon(k^{-1})) \tau_{n-1}(x - \epsilon(k^{-1})) \\
&\quad + \quad \oint \frac{\mathrm{d}k}{2\pi\mathrm{i}k} k^{n'-n-1} \mathrm{e}^{\xi(x'-x,k)} \tau_{n+1}(x + \epsilon(k^{-1})) \tau_{n'-1}(x' - \epsilon(k^{-1})) \\
&\quad = \quad \begin{cases} 0 & (n - n' \equiv 0 \bmod 2), \\ \tau_n(x)\tau_{n'}(x') & (n - n' \equiv 1 \bmod 2). \end{cases}
\end{aligned}$$

ただし, $\xi(x,k) = \sum_i x_i k^i$, $\epsilon(k^{-1}) = (1/k, 1/(2k^2), 1/(3k^3), \ldots)$ である. この式から通常の手続きを経て, (5) 等の双線形方程式が導かれる. また, 結合型 KP 方程式に対するラックス対も, 双線形恒等式から導出できる. さらに, いわゆる「三輪変換」$x_j = \sum_i l_i a_i^j / j$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ を適用することで, 対応する離散方程式 (離散結合型 KP 方程式) を得ることも可能である. 元の双線形恒等式のパフィアン型の解に対して三輪変換を適用することで, 離散方程式に対するパフィアン型の解も得られる. 逆に, パフィアンの恒等式の立場からも同じ離散方程式が導出されることが, 辻本・近藤により報告されている [TK]. また, 新沢は D 型の離散方程式に付随する格子の構造と, ルート系との関係を議論している [Sh].

我々の立場では, 結合型 KP ヒエラルキーは 2 成分 KP ヒエラルキーの reduction であったのだから, 2 成分のフェルミオンを用いて記述される. 一方, 上記の議論では 1 成分のフェルミオンを用いている. 実は, 2 成分のフェルミオンにある種の対称性を科すと, 上のような 1 成分系の言葉に書き直されることが証明できる. このように捕らえることで, この節の冒頭で引用した広田の疑問に対しても明確な解答が与えられる.

2 成分 KP ヒエラルキー　($A_{2\infty}$)

$\cup$

結合型 KP ヒエラルキー　(D'_{∞})

$\cup$　　　　$\cup$

AKP　(A_{∞})　　　　BKP　(B'_{∞})

このあたりの詳細については, 現在論文を準備中である.

References

[AHM] M. Adler, E. Horozov and P. van Moerbeke: *preprint* (solv-int/9903005).

[AM1] M. Adler and P. van Moerbeke: *preprint* (solv-int/9903009).

[AM2] M. Adler and P. van Moerbeke: *preprint* (solv-int/9912008).

[ASM] M. Adler, T. Shiota and P. van Moerbeke: *preprint* (solv-int/9909010).

[H] 広田 良吾: 「直接法による　ソリトンの数理」, 岩波書店, 1992.

[HO] R. Hirota and Y. Ohta: *J. Phys. Soc. Jpn.* **60** (1991) 798 – 809.

[HS] R. Hirota and J. Satsuma: *Phys. Lett.* A **85** (1981) 407 – 408.

[JM] M. Jimbo and T. Miwa: *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **19** (1983) 94 – 1001.

[K1] S. Kakei: *J. Phys. Soc. Jpn.* **68** (1999) 2875 – 2877.

[K2] S. Kakei: *Phys. Lett.* A **264** (2000) 449 – 458.

[K3] 筧 三郎: 九大応力研 研究集会報告 **10ME-S1** (1999) 69 – 74.

[vdL] J. van de Leur: *preprint* (solv-int/9909028).

[Sh] 新沢信彦: 九大応力研 研究集会「非線形波動のメカニズム— 現象とモデルの数理構造」(1999 年 11 月 8 日 – 10 日) における講演.

[TK] 辻本 諭, 近藤弘一: 京大数理研 短期共同研究「離散可積分系に関する最近の話題」(1999 年 8 月 2 日 – 4 日) における講演.

[WGHZ] Y. Wu, X. Geng, X. Hu and S. Zhu: *Phys. Lett.* A **255** (1999) 259 – 264.

[ZS] V. E. Zakharov and A. B. Shabat: *Funct. Anal. and its Appl.* **8** (1974) 226 – 235.