九州大学応用力学研究所 研究集会報告 **10ME-S1** (1999) pp.69-74

結合型 KP ヒエラルキーと行列積分

東京大学大学院数理科学研究科　　筧　三郎　(Kakei, Saburo) *

Abstract

直交行列・シンプレクティック行列のアンサンブルに対する行列積分は，結合型 KP ヒエラルキーの τ 関数とみなされることを示す。また，結合型 KP ヒエラルキーは 2 成分 KP ヒエラルキーの特殊化として捕らえることができることも分かった。

1　緒言

1990 年前後に 2 次元量子重力の模型として行列模型を用いることが提唱されて以来，行列積分と可積分系との関係が盛んに研究されてきた [1, 2, 3, 4, 5]。典型的な例としては，Hermitian 1-matrix model と KP ヒエラルキーとの関係が挙げられる。すなわち，相関関数として現れる行列積分が KP ヒエラルキーの τ 関数とみなされるわけである。このような場合は可積分系の手法を用いることで，モデルの非摂動論的情報を導き出すことができる。

一方，KP ヒエラルキーの一つの拡張として，広田・太田は「結合型 KP ヒエラルキー」を提唱した [6, 7]。通常の KP ヒエラルキーの場合，あるクラスの解は行列式を用いて表されるのに対して，解がパフィアンによって表されるような方程式の系列が結合型 KP ヒエラルキーである。双線形形式の具体的な形をいくつか示しておこう。

$$(D_1^4 - 4D_1D_3 + 3D_2^2)\tau\cdot\tau = 24\bar{\sigma}\sigma, \tag{1a}$$

$$(D_1^3D_2 + 2D_2D_3 - 3D_1D_4)\tau\cdot\tau = 12D_1\bar{\sigma}\cdot\sigma, \tag{1b}$$

$$(D_1^3 + 2D_3 + 3D_1D_2)\sigma\cdot\tau = 0, \tag{1c}$$

$$(D_1^4 - 4D_1D_3 - 3D_2^2 - 6D_4)\sigma\cdot\tau = 0, \tag{1d}$$

$$(D_1^3 + 2D_3 - 3D_1D_2)\bar{\sigma}\cdot\tau = 0, \tag{1e}$$

$$(D_1^4 - 4D_1D_3 - 3D_2^2 + 6D_4)\bar{\sigma}\cdot\tau = 0. \tag{1f}$$

ここで D_j^k は，いわゆる広田の双線形演算子である:

$$D_m^kD_n^lf\cdot g = \left(\frac{\partial}{\partial t_m} - \frac{\partial}{\partial t'_m}\right)^k\left(\frac{\partial}{\partial t_n} - \frac{\partial}{\partial t'_n}\right)^l f(t_1,t_2,\ldots)g(t'_1,t'_2,\ldots)\Big|_{t'=t}$$

特に，

$$u = 2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\log\tau, \qquad v = \sigma/\tau, \qquad \bar{v} = \bar{\sigma}/\tau,$$

* E-mail: kakei@poisson.ms.u-tokyo.ac.jp
1999 年 4 月より早稲田大学理工学部数理科学科

とおけば，u, v, $\bar{v}$ は次の結合型 KP 方程式を満たす:

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(4\frac{\partial u}{\partial t_3}-6u\frac{\partial u}{\partial t_1}-\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^3}\right)-3\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}+24\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}(v\bar{v})+0, \tag{2a}$$

$$2\frac{\partial v}{\partial t_3}+3u\frac{\partial v}{\partial t_1}+\frac{\partial^3 v}{\partial t_1^3}+3\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t_1\partial t_2}+v\int^{t_1}\frac{\partial u}{\partial t_2}\mathrm{d}t_1\right)=0, \tag{2b}$$

$$2\frac{\partial \bar{v}}{\partial t_3}+3u\frac{\partial \bar{v}}{\partial t_1}+\frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial t_1^3}+3\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t_1\partial t_2}+\bar{v}\int^{t_1}\frac{\partial u}{\partial t_2}\mathrm{d}t_1\right)=0. \tag{2c}$$

研究集会では，直交行列・シンプレクティック行列のアンサンブルに対する行列積分が，結合型 KP ヒエラルキーの τ 関数とみなされることを述べた。可積分系との関係を関係を明らかにすれば，エルミートの場合と同様に，非摂動論的な結果が得られることが期待される。しかし，通常の KP ヒエラルキーとは違って，結合型の場合はあまり多くのことが調べられているわけではない。論文 [6] では双線形化法，すなわち，いわゆる「広田の方法」に基づいて方程式が導出されていて，ヒエラルキー全体としての構造には言及されていない。方程式が Lax 形式で表されるか，無限個の保存量を持つか，などといったこともまだ明らかにされてはいなかった。

本論説では，まず第 2 節で結合型 KP ヒエラルキーと行列積分との関係を述べる。次に第 3 節では，研究集会以降に得られた結果として，結合型 KP ヒエラルキーが 2 成分 KP ヒエラルキーの特殊化として得られることを示す。2 成分の場合との関係が分かれば，Lax 形式，保存量などは 2 成分のものから自然に構成されると考えられる。

2　行列積分とパフィアン

以下では，次の行列積分を考える。

$$Z_N^{(\beta)}=\frac{1}{N!}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{1\le j<k\le N}(x_j-x_k)^{\beta}\exp\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty}x_i^m t_m\right]\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N, \tag{3}$$

ここで，パラメータ β は，考える行列のアンサンブルが直交行列，ユニタリー行列，シンプレクティック行列であることに対応して，それぞれ $\beta=1,2,4$ の値を取る。この多重積分は，$\beta=2$ の場合は 1 重積分の行列式として表すことができる:

$$\begin{aligned}Z_N^{(\beta=4)} &= \frac{1}{N!}\int\cdots\int\det\left[x_k^j\right]^2_{j,k=1,\ldots,N}\exp\left[\sum_{i=1}^{N}\eta(x_i,t)\right]\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N\\ &= \det\left[\int_{-\infty}^{\infty}x^{k+j-2}\exp\left[2\eta(x,t)\right]\mathrm{d}x\right]_{j,k=1,\cdots,N}.\end{aligned} \tag{4}$$

このことから，$Z_N^{(\beta=2)}$ が KP ヒエラルキーの τ 函数であることが直ちに示される [2, 3, 4, 5]。

$\beta=1,4$ の場合にも，de Bruijn [8] による多重積分の公式を用いれば同様の書き換えが可能である。ただし，今度は行列式ではなくパフィアンが現れるわけである。

$$\begin{aligned}Z_N^{(\beta=1)} &= \int_{x_1\le\cdots\le x_N}\!\!\cdots\int\det\left[x_k^{j-1}\right]_{j,k=1,\ldots,N}\exp\left[\sum_{i=1}^{N}\eta(x_i,t)\right]\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N\\ &= \mathrm{Pf}\left[\iint_{x<y}(x^{j-1}y^{k-1}-y^{j-1}x^{k-1})\exp\left[\eta(x,t)+\eta(y,t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]_{j,k=1,\cdots,N},\end{aligned} \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
Z_N^{(\beta=4)} &= \frac{1}{N!}\int\cdots\int \det\left[x_k^j,\quad (j-1)x_k^j\right]_{j=1,\ldots,2N,\ k=1,\ldots,N} \exp\left[\sum_{i=1}^{N}\eta(x_i,t)\right]\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N \\
&= \mathrm{Pf}\left[\int_{-\infty}^{\infty}(k-j)x^{k+j-3}\exp\left[2\eta(x,t)\right]\mathrm{d}x\right]_{j,k=1,\cdots,N}. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

ここで $\mathrm{Pf}[A_{2N}]$ は，偶数次反対称行列 $A_{2N}=[a_{ij}]_{1\leq i,j\leq 2N}$ に対するパフィアンを表す:

$$
\mathrm{Pf}[A_{2N}] = \sum_{\substack{j_1<j_3<\cdots<j_{2N-1}\\ j_1<j_2,\ldots,j_{2N-1}<j_{2N}}} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2N \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_{2N}\end{pmatrix} a_{j_1j_2}a_{j_3j_4}\cdots a_{j_{2N-1}j_{2N}}.
$$

一方，結合型 KP ヒエラルキーの特解としては，ロンスキー型パフィアンとグラム型パフィアンの 2 種類が知られている [6, 7]。ロンスキー型の場合は，パフィアンの成分 a_{ij} は次の「分散関係式」を満たす:

$$
\frac{\partial}{\partial x_n}a_{l,m} = a_{l+n,m} + a_{l,m+n} \qquad (n=1,2,\ldots) \qquad (7)
$$

このとき，τ, σ, $\bar{\sigma}$ を次のように定めると，双線形方程式 (1a-f) はパフィアンの恒等式に帰着される:

$$
\tau = \mathrm{Pf}[A_{2N}], \qquad \sigma = \mathrm{Pf}[A_{2N-2}], \qquad \bar{\sigma} = \mathrm{Pf}[A_{2N+2}].
$$

行列積分の表式 (5), (6) を眺めると，その成分は分散関係式 (7) を満たすので，

$$
\tau = Z_N^{(\beta)}, \qquad \sigma = Z_{N-1}^{(\beta)}, \qquad \bar{\sigma} = Z_{N+1}^{(\beta)} \qquad (\beta=1,4)
$$

が (1a-f) を満たすことが分かる [9]。

3　結合型 KP ヒエラルキー

本節では，結合型 KP ヒエラルキーが 2 成分 KP ヒエラルキーの特殊化として得られることを示す。KP ヒエラルキーのようなソリトン方程式を扱う手法は数多く提出されているが，ここでは Zakharov-Shabat の "dressing method" を用いることにする。

まず，以下の積分演算子 $\boldsymbol{F}$ を考える:

$$
\widehat{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{\psi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}(x,z)\boldsymbol{\psi}(z)\mathrm{d}z. \qquad (8)
$$

ただし，積分核 $\boldsymbol{F}(x,z)$ は 2×2 行列値の函数である。この $\widehat{\boldsymbol{F}}$ が，次の "bare opetarors" $\widehat{\boldsymbol{A}}_n^{(0)}$ と可換であることを要請する:

$$
\widehat{\boldsymbol{A}}_n^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t_n^{(a)}} - \boldsymbol{E}_a\frac{\partial^n}{\partial x^n}, \qquad (9)
$$

ただし，$(\boldsymbol{E}_a)_{i,j} = \delta_{a,i}\delta_{i,j}$ $(a=1,2)$ である。このとき可換性 $[\boldsymbol{F},\ \widehat{\boldsymbol{A}}_n^{(0)}]=0$ より，積分核 $\boldsymbol{F}(x,z)$ は次の微分方程式を満たすことが示される:

$$
\frac{\partial}{\partial t_n^{(a)}}\boldsymbol{F}(x,z) - \boldsymbol{E}_a\frac{\partial^n}{\partial x^n}\boldsymbol{F}(x,z) + (-1)^n\frac{\partial^n}{\partial z^n}\boldsymbol{F}(x,z)\boldsymbol{E}_a = 0. \qquad (10)
$$

次に，この $\boldsymbol{F}(x,z)$ の “Volterra 分解” を考える:

$$(1+\widehat{\boldsymbol{F}}) = (1+\widehat{\boldsymbol{K}}_+)^{-1}(1+\widehat{\boldsymbol{K}}_-). \tag{11}$$

ただし，$\widehat{\boldsymbol{K}}_\pm$ は次のような積分演算子である:

$$\widehat{\boldsymbol{K}}_+\boldsymbol{\psi}(x) = \int_x^\infty \boldsymbol{K}_+(x,z)\boldsymbol{\psi}(z)\mathrm{d}z, \qquad \widehat{\boldsymbol{K}}_-\boldsymbol{\psi}(x) = \int_{-\infty}^x \boldsymbol{K}_-(x,z)\boldsymbol{\psi}(z)\mathrm{d}z. \tag{12}$$

以下では，分解 (11) の存在と一意性を仮定する。分解 (11) は，次の積分方程式 (Gelfand-Levitan-Marchenko 方程式) を解くことで実行される。

$$\boldsymbol{K}_+(x,z) + \boldsymbol{F}(x,z) + \int_x^\infty \boldsymbol{K}_+(x,y)\boldsymbol{F}(y,z)\mathrm{d}y = 0, \tag{13}$$

2 成分 KP ヒエラルキーは bare operators を $\widehat{\boldsymbol{K}}_\pm$ で “dress” することで得られる:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_n^{(a)}} - \boldsymbol{B}_n^{(a)}\right)(1+\widehat{\boldsymbol{K}}_\pm) = (1+\widehat{\boldsymbol{K}}_\pm)\left(\frac{\partial}{\partial t_n^{(a)}} - \boldsymbol{E}_a\frac{\partial^n}{\partial x^n}\right). \tag{14}$$

可換性 $[\boldsymbol{F},\ \widehat{\boldsymbol{A}}_n^{(0)}] = 0$ より，演算子 $\boldsymbol{B}_n^{(a)}$ は積分項を含まないことが分かる。この操作により，自明でない可換微分作用素の族が得られる:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_m^{(a)}} - \boldsymbol{B}_m^{(a)}\ ,\ \frac{\partial}{\partial t_n^{(b)}} - \boldsymbol{B}_n^{(b)}\right] = 0. \tag{15}$$

可換性より $\boldsymbol{B}_m^{(a)}$ の係数の満たすべき非線型方程式系が得られるが，これが 2 成分 KP ヒエラルキーである。

さて，このヒエラルキーの特別な場合として，結合型 KP ヒエラルキーを考えよう。(天下りではあるが) 積分核 $\boldsymbol{F}(x,z)$ が以下の対称性を持つことを要請しよう:

$${}^t\boldsymbol{F}(x,z) = -\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}(z,x)\boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

この要請の下では，$\boldsymbol{F}(x,z)$ の時間発展も制限を受ける。(10) 式の転置をとって，(16) を用いると，

$$\frac{\partial}{\partial t_n^{(a)}}\boldsymbol{F}(x,z) + (-1)^{n+1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_a\boldsymbol{P}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\boldsymbol{F}(x,z) + \frac{\partial^n}{\partial z^n}\boldsymbol{F}(x,z)\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_a\boldsymbol{P} = 0 \tag{17}$$

が得られる。$\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{E}_1$ に注意すると，

$$\left\{(-1)^n\frac{\partial}{\partial t_n^{(1)}} + \frac{\partial}{\partial t_n^{(2)}}\right\}\boldsymbol{F}(x,z;t) = 0, \tag{18}$$

すなわち，$\boldsymbol{F}(x,z;t)$ は $t_n = \{(-1)^n t_n^{(1)} - t_n^{(2)}\}/2$ のみの函数であることが分かる。この t_n に対応して，次の bare operators を考えよう。

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{A}}_n^{(0)} &= (-1)^n\left(\frac{\partial}{\partial t_n^{(1)}} - \boldsymbol{E}_1\frac{\partial^n}{\partial x^n}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial t_n^{(2)}} - \boldsymbol{E}_2\frac{\partial^n}{\partial x^n}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_n} + (-1)^n\boldsymbol{J}^{n-1}\frac{\partial^n}{\partial x^n}, \qquad \text{ただし} \qquad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{19}$$

これらを “dress” することにより，結合型 KP ヒエラルキーが得られる。

$$\widehat{\boldsymbol{A}}_n = (1+\widehat{\boldsymbol{K}}_+)\widehat{\boldsymbol{A}}_n^{(0)}(1+\widehat{\boldsymbol{K}}_+)^{-1}. \tag{20}$$

$\widehat{\boldsymbol{A}}_2$, $\widehat{\boldsymbol{A}}_3$ の具体的な形を計算すると，

$$\widehat{\boldsymbol{A}}_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{J}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\begin{pmatrix} \tilde{u} & v \\ -\bar{v} & -\tilde{u} \end{pmatrix}, \tag{21a}$$

$$\widehat{\boldsymbol{A}}_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3u\frac{\partial}{\partial x} - 3u\tilde{u} - 3\begin{pmatrix} w_x & v_x \\ \bar{v}_x & \bar{w}_x \end{pmatrix}. \tag{21b}$$

ただし，

$$u = \frac{\partial}{\partial x}K^{(11)}(x,x), \qquad \tilde{u} = K^{(11)}(x,x), \qquad \begin{pmatrix} w & v \\ \bar{v} & \bar{w} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{K}(x,z)\Big|_{z=x},$$
$$w_x - \bar{w}_x + \tilde{u}_{x_2} = 0, \qquad w_x + \bar{w}_x = u_x - 2u\tilde{u},$$

である。これらの可換性 $[\widehat{\boldsymbol{A}}_2, \widehat{\boldsymbol{A}}_3] = 0$ より，結合型 KP 方程式 (2a-c) が得られる。すなわち，$\widehat{\boldsymbol{A}}_2$, $\widehat{\boldsymbol{A}}_3$ は結合型 KP 方程式に対する Lax 対である。

特解を構成するためには，まず (10), (16) を満たす $F(x,z)$ から出発する。一つの例としては，

$$\boldsymbol{F}(x,z) = \boldsymbol{P}\,{}^t\Xi(x)\boldsymbol{C}^{-1}\Xi(z) \tag{22}$$

とすることである。ただし，$\boldsymbol{C}$ は可逆な反対称行列であり，

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad {}^t\Xi(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_N(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & \cdots & g_N(x) \end{pmatrix} \tag{23}$$

である。可換性の条件 $[\widehat{\boldsymbol{F}}, \widehat{\boldsymbol{A}}_n^{(0)}] = 0$ より，函数 $f_j(x)$, $g_j(z)$ は以下の方程式を満たすものとする:

$$\frac{\partial}{\partial x_n}f_i = \frac{\partial^n}{\partial x^n}f_i, \qquad \frac{\partial}{\partial x_n}g_i = (-1)^{n-1}\frac{\partial^n}{\partial x^n}g_i. \tag{24}$$

この $\boldsymbol{F}(x,z)$ の形に対応して，$\boldsymbol{K}_+(x,z)$ を

$${}^t\boldsymbol{K}_+(x,z) = \boldsymbol{P}\mathcal{K}(x)\Xi(z), \qquad {}^t\mathcal{K}(x) = \begin{pmatrix} K_1(x) & K_2(x) & \cdots & K_N(x) \\ \tilde{K}_1(x) & \tilde{K}_2(x) & \cdots & \tilde{K}_N(x) \end{pmatrix},$$

とおく。すると，積分方程式 (13) は次の線型方程式に退化する。

$$\left[\boldsymbol{C} + \int_x^\infty \Xi(y)\boldsymbol{P}\,{}^t\Xi(y)\mathrm{d}y\right]\mathcal{K}(x) = \Xi(x). \tag{25}$$

ここで係数行列は反対称であり，反対称行列の逆行列はパフィアンを用いて表されることから [10]，積分核 $\boldsymbol{K}_+(x,z)$ のパフィアンによる表示が得られる。こうして結合型 KP ヒエラルキーの特解が得られるが，それは広田・太田のグラム型パフィアン [6] と一致する。

4 結言

本論節では結合型 KP ヒエラルキーの構造，およびその特解として現れる行列積分について議論した。Alder らも同様の視点からの研究を行い，彼らが “Pfaff lattice” と呼ぶ，微分差分方程式のヒエラルキーを導出して

いる [12, 13]。もちろん dressing method の立場からも微分差分方程式のヒエラルキーを導出することができるが [11]，両者が同じ結果を与えるかどうかは現時点では明らかでない。

第 3 節ではグラム型パフィアンが dressing method により得られることを示したが，ロンスキー型パフィアンがなぜ現れるかはまだ理解できていない。ロンスキー型パフィアンに対しては，現時点では双線型方程式による heuristic な証明しか知られていないが，いわゆる「佐藤方程式」による定式化の立場から議論すれば，こういったことも見通し良く理解できるであろう。また，条件 (16) が，表現論的にはどのような意味を持つかという問題も興味深い。

これらの点を解明すべく，現在研究を進行中である。

References

[1] M. Kaku: *Strings, conformal fields, and topology*, Graduate text in contemporary physics, (Springer, NY, 1991).

[2] A. Morozov: "Integrability and matrix models", Phys. Usp. **37** (1994) 1-55.

[3] A. Marshakov, A. Mironov and A. Morozov; "Generalized matrix models as conformal field theories", Phys. Lett. **B265** (1991) 99-107.

[4] M. Mulase: "Matrix integrals and integrable systems", In *Topology, geometry and field theory*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1994, pp.111-127.

[5] M. Mulase: "Algebraic theory of the KP equations", In *Perspectives in mathematical physics*, Conf. Proc. Lecture Notes Math. Phys. III, Internat. Press, Cambridge, MA, 1994, pp.151-217.

[6] R. Hirota and Y. Ohta: "Hierarchies of coupled soliton equations. I", J. Phys. Soc. Jpn. **60** (1991) 798-809.

[7] 広田 良吾: 「直接法による　ソリトンの数理」, 岩波書店, 1992.

[8] N.G. de Bruijn: "On some multiple integrals involving determinants", J. Indian Math. Soc. **19** (1955) 133-151.

[9] S. Kakei: "Orthogonal and Symplectic Matrix Integral and Coupled KP Hierarchy", preprint, 1999.

[10] R. Hirota: "Soliton solutions to the BKP equations. II. The integral equation", J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989) 2705-2712.

[11] S. Kakei: "Dressing Method and the Coupled KP Hierarchy", preprint, 1999.

[12] M. Adler, E. Horozov and P. van Moerbeke: "The Pfaff lattice and skew-orthogonal polynomials", preprint (solv-int/9903005).

[13] M. Adler and P. van Moerbeke: "Symmetric matirix integral and the Pfaff lattice", preprint (solv-int/9903009).