九州大学応用力学研究所 研究集会報告 **9ME-S2** (1998) pp.29-34

量子カロジェロ模型の代数構造

東京大学大学院数理科学研究科　　筧　三郎　(KAKEI, Saburo) *

Abstract

量子カロジェロ模型の代数的構造を, ヘッケ代数の表現論の立場から考察する. その立場から見ると, A 型, B 型のいずれの場合も退化ダブルアフィンヘッケ代数の構造を持ち, その性質を統一的な視点から議論することが可能となる.

1　緒言

よく知られているように, ある量子系の波動関数を具体的に構成する際には様々な特殊関数が現れる. 一方, 量子多体系の場合には, 通常は何らかの近似を取らざるを得ない. しかし空間 1 次元の系においては, ある種の特殊な相互作用を仮定すれば, 対応する波動関数を近似なしに取り扱うことが可能となり, 波動関数がある種の「多変数特殊関数」を用いて表されることが期待される.

そのような系の例として, 次のサザーランド模型が挙げられる [13]:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{S}} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial \theta_j^2} + \frac{1}{2}\sum_{j<k} \frac{\beta(\beta-1)}{\sin^2[(\theta_j-\theta_k)/2]}. \tag{1}$$

ここで β は相互作用の大きさを表す定数で, 以下では非負整数と仮定する. 各粒子は $\sin^{-2} r$ 型のポテンシャルを通して長距離相互作用を及ぼしあっていることに注意していただきたい.

以下ではボーズ粒子系を考えよう. すなわち, 波動関数が対称式であることを要請する. 周期的境界条件の下でこのハミルトニアンに対する固有状態を求めると,

$$\psi = (\text{平面波 } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j} \text{ の多変数対称多項式}) \times (\text{基底状態の波動関数})$$

という形をしていることが分かる. ここに現れる多項式を, 対応する内積で直交化したものはジャック多項式と呼ばれている.

長距離相互作用を持つ模型の第 2 の例が, 次の (A 型) カロジェロ模型である [3, 13]:

$$\mathcal{H}_A = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + x_j^2\right) + \sum_{j<k}\frac{\beta(\beta-1)}{(x_j-x_k)^2}, \tag{2}$$

ここで, 添え字 *“A”* はハミルトニアン (2) が A_{N-1} 型のワイル群の作用に関して不変であることを意味する. 類似の模型として, B_N 型のワイル群の作用に関して不変であるものも存在する [15]:

$$\mathcal{H}_B = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left\{-\frac{\partial^2}{\partial z_j^2} + z_j^2 + \frac{\gamma(\gamma-1)}{z_j^2}\right\} + \sum_{j<k}\left\{\frac{\beta(\beta-1)}{(z_j-z_k)^2} + \frac{\beta(\beta-1)}{(z_j+z_k)^2}\right\}. \tag{3}$$

カロジェロ模型 (2), (3) に対しても, 波動関数は

$$\psi = (\text{多変数対称多項式}) \times (\text{基底状態の波動関数}) \tag{4}$$

という形をしている. ここで現れる多項式の基底として, A 型の場合はエルミート多項式を, B 型の場合にはラゲル多項式を多変数化したものがそれぞれ登場する [1, 5, 8, 9, 10, 14].

本稿では, 上記の 3 つの模型 (1), (2), (3) の背後にある共通の代数構造を紹介することを目的とする. 実はこれらの模型は「退化ダブルアフィンヘッケ代数」の, それぞれ異なる表現に対応しているのである. そのような観点から見ると, 一見異なる相互作用を持つ模型に対して, 統一的な視点から取り扱うことが可能となる.

* E-mail: kakei@poisson.ms.u-tokyo.ac.jp

2　退化ダブルアフィンヘッケ代数とジャック多項式

まずは物理的なモデルから離れて, 抽象的に代数を定義しておこう.

Definition 1:　退化ダブルアフィンヘッケ代数 $\mathfrak{H}'$ [4]

生成元

$$x_j^{\pm 1}, \quad \xi_j \quad (j=1,\ldots,N), \qquad s_j \quad (j=1,\ldots,N-1)$$

定義関係式

$$\begin{aligned}
&[x_i,x_j]=[\xi_i,\xi_j]=0,\\
&s_j^2=1, \qquad s_js_{j+1}s_j=s_{j+1}s_js_{j+1}, \qquad [s_i,s_j]=0 \quad (|i-j|\neq 1),\\
&x_is_{ij}=s_{ij}x_j, \qquad x_is_{jk}=s_{jk}x_i \quad (i\neq j,k),\\
&\xi_{j+1}s_j-s_j\xi_j \ = \ \beta, \qquad s_j\xi_{j+1}-\xi_js_j \ = \ \beta, \qquad [s_i,\xi_j]=0 \quad (j\neq i,i+1),\\
&[\xi_i,x_j]=\begin{cases} -\beta x_js_{ij} & (i>j),\\ x_i+\beta\left(\displaystyle\sum_{k(<i)}x_ks_{ik}+\sum_{k(>i)}x_is_{ik}\right) & (i=j),\\ -\beta x_is_{ij} & (i<j).\end{cases}
\end{aligned}$$

以下では x_j, ξ_j, s_j から生成される部分代数を $\widetilde{\mathfrak{H}}'$ と表し, その表現を構成する. そのために, まず A 型の Dunkl 作用素 D_j^A を定義しておこう [6]:

$$D_j^A=\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{k(\neq j)}\frac{\beta}{x_j-x_k}(1-s_{jk}) \qquad (j=1,\ldots,N).$$

ここで, s_{ij} は x_1, ..., x_N の関数に対して 2 つの文字 x_i, x_j の入れ替えとして作用する. 一見すると複雑な形をしているが, D_j^A 達は可換であることが重要である.

次に [2] に従って, 次式のように $\hat{D}_j^A$ を定義しよう:

$$\hat{D}_j^A=x_jD_j^A+\beta\sum_{k(<j)}s_{jk}.$$

以下ではこの $\hat{D}_j^A$ をチェレドニック作用素と呼ぶことにする [4]. Dunkl 作用素 D_j^A は次数を下げるが, チェレドニック作用素 $\hat{D}_j^A$ は次数を保つことを注意しておく.

この $\hat{D}_j^A$ もまた互いに可換であるので, 適当な多項式をとることにより同時対角化が可能である. そのような多項式は「非対称ジャック多項式」と呼ばれている.

Definition 2:　非対称ジャック多項式 [12]

分割 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)$, $\mathfrak{S}_N$ の元 w に対し, 非対称ジャック多項式 $E_w^\lambda(x)$ は次の 2 条件で一意的に定められる.

(i)　$E_w^\lambda(x)=x_w^\lambda+\displaystyle\sum_{(\mu,w')\prec(\lambda,w)}u_{ww'}^{\lambda\mu}x_{w'}^\mu$　　　(ii)　$E_w^\lambda(x)$ は $\hat{D}_j^A$ の同時固有関数である.

ここで, $x_w^\lambda=x_{w(1)}^{\lambda_1}\cdots x_{w(N)}^{\lambda_N}$ という記法を用いた. また, ordering $\prec$ は次のように定義される.

$$(\mu,w')\prec(\lambda,w) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases}\text{(i)} & \mu<_{\mathrm{D}}\lambda \quad (<_{\mathrm{D}}\text{: dominance ordering [11]}),\\ \text{(ii)} & \text{if } \mu=\lambda \text{ then } w'<_{\mathrm{B}} w \quad (<_{\mathrm{B}}\text{: Bruhat ordering [7]}).\end{cases}$$

非対称ジャック多項式を対称化するとジャック対称多項式が得られる (歴史的にはこちらが先に導入された):

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{\#\mathfrak{S}_N^\lambda}\prod_{v\in\mathfrak{S}_N} v(E_w^\lambda) \qquad (\mathfrak{S}_N^\lambda \text{ は 分割 } \lambda \text{ を変えない } \mathfrak{S}_N \text{ の部分群}).$$

チェレドニック作用素 $\hat{D}_j^A$ を用いると, $\mathfrak{H}'$ の一つの表現を与えることができる:

$$\pi_J(x_j) = x_j, \qquad \pi_J(\xi_j) = \hat{D}_j^A, \qquad \pi_J(s_{ij}) = s_{ij}.$$

実は, この表現がサザーランド模型 (1) と関係するのである．まず $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathrm{S}}$ を次のように定める:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathrm{S}} &= \mathrm{Res}\left(\sum_{j=1}^N \left\{\hat{D}_j^A - \frac{\beta}{2}(N-1)\right\}^2\right)\\ &= \sum_{j=1}^N \left(x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 + \beta\sum_{j<k}\frac{x_j+x_k}{x_j-x_k}\left(x_j\frac{\partial}{\partial x_j} - x_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right) + \frac{\beta^2}{12}N(N^2-1),\end{aligned}$$

ここで, $\mathrm{Res}\, X$ は X の作用を対称関数の空間に制限することを意味する．この $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathrm{S}}$ を若干ひねることにより, (1) のハミルトニアンが得られるのである:

$$\phi_{\mathrm{S}}\circ\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathrm{S}}\circ\phi_{\mathrm{S}}^{-1} = \sum_{j=1}^N\left(x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 - \beta(\beta-1)\sum_{j<k}\frac{2x_jx_k}{(x_j-x_k)^2} = \mathcal{H}_{\mathrm{S}}.$$

ただし, $\phi_{\mathrm{S}}(x)$ は

$$\phi_{\mathrm{S}}(x) = \prod_{j<k}|x_j-x_k|^\beta\prod_{j=1}^N x_j^{-\beta(N-1)/2}$$

で定義され, 基底状態の波動関数に対応している．また 2 番目の等号では, 変数変換 $x_j = \exp(\mathrm{i}\theta_j)$ を行った．

ここで見たように $\mathcal{H}_{\mathrm{S}}$ は $\hat{D}_j^A$ の対称式で表されるので, ジャック対称多項式 $J_\lambda(x)$ を固有関数として持つことが分かる．

3 カロジェロ模型に付随した多変数直交多項式

前節ではサザーランド模型と, その固有関数であるジャック多項式について, 退化ダブルアフィンヘッケ代数との関係を概観した．本節では, 同じ代数の別の表現を考えることでカロジェロ模型をも取り扱うことができることを見ていこう．

3.1 A 型カロジェロ模型

まず, ハミルトニアン (2) に関連した「生成・消滅演算子」を導入しておこう．

$$\begin{aligned}\widetilde{a}_j^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\widetilde{\phi}_A^{-1}\circ(-D_j^A + x_j)\circ\widetilde{\phi}_A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\frac{\partial}{\partial x_j} + 2x_j - \sum_{k(\neq j)}\frac{\beta}{x_j-x_k}(1-s_{jk})\right\},\\ \widetilde{a}_j &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\widetilde{\phi}_A^{-1}\circ(D_j^A + x_j)\circ\widetilde{\phi}_A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k(\neq j)}\frac{\beta}{x_j-x_k}(1-s_{jk})\right\}.\end{aligned}$$

ただし, $\widetilde{\phi}_A = \prod_{k=1}^N \exp(-x_k^2/2)$ である．このとき, $[\widetilde{a}_i, \widetilde{a}_j^\dagger] = [D_i^A, x_j]$ が成り立つことは定義から明らかであるから,

$$\rho_A(x_j) = \widetilde{a}_j^\dagger, \qquad \rho_A(D_j) = \widetilde{a}_j, \qquad \rho_A(s_{ij}) = s_{ij}$$

と定めると同型写像となる. よって次のような $\widetilde{\mathfrak{H}}'$ の表現が得られる:

$$\pi_A(\xi_j) = \widetilde{h}_j^A \equiv \widetilde{a}_j^\dagger \widetilde{a}_j + \beta \sum_{k(<j)} s_{jk}, \qquad \pi_A(x_j) = \widetilde{a}_j^\dagger, \qquad \pi_A(s_{ij}) = s_{ij}. \tag{5}$$

この表現がハミルトニアン (2) に対応している. 実際,

$$\mathcal{H}_A = \phi_A \circ \mathrm{Res}\left(\sum_{j=1}^N \widetilde{h}_j^A\right) \circ \phi_A^{-1} + \frac{N}{2}.$$

とすれば (2) の $\mathcal{H}_A$ が得られる. ただし,

$$\phi_A(x) = \prod_{j<k} |x_j - x_k|^\beta \prod_{j=1}^N \exp(-x_j^2/2)$$

は $\mathcal{H}_A$ の基底状態の波動関数である.

さて, (5) が同型写像であり, かつ「真空」1 への作用も保たれることから, 次の事実が成り立つ.

Proposition 1: 多項式の空間 $\mathbb{C}[x]$ 上の線形写像 σ_A を次のように定義する:

$$\text{任意の} \quad f(x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{C}[x] \quad \text{に対し} \quad \sigma_A\left(f(x_1,\ldots,x_N)\right) = f(\widetilde{a}_1^\dagger,\ldots,\widetilde{a}_N^\dagger)\cdot 1.$$

このとき, 任意の $Q \in \pi_J(\mathfrak{H}_0')$, $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ に対し,

$$\sigma_A(Qf(x)) = \rho_A(Q)\sigma_A(f(x)).$$

$\mathcal{H}_A$ の励起状態の波動関数は (4) という形をしているが, intertwining operator σ_A を用いると, その多項式部分は

$$H_\lambda(x) = 2^{-|\lambda|/2}\sigma_A(J_\lambda(x)) = 2^{-|\lambda|/2} J_\lambda(\widetilde{a}^\dagger)\cdot 1. \tag{6}$$

という形に表すことができる [8, 10, 14]. (ただし $|\lambda| = \sum_j \lambda_j$ であり, 最高次の係数が 1 になるように係数を調整してある.) この多項式はエルミート多項式を多変数化したものとみなすことができるので, (6) は多変数エルミート多項式のオペレーター表示を与えたものと考えられる.

3.2 B 型カロジェロ模型

ハミルトニアン (3) を扱うために, まずは B_N 型の Dunkl 作用素を導入しておく [6, 15]:

$$D_j^B = \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{k(\neq j)}\left\{\frac{\beta}{z_j - z_k}(1 - s_{jk}) + \frac{\beta}{z_j + z_k}(1 - t_j t_k s_{jk})\right\} + \frac{\gamma}{z_j}(1 - t_j).$$

ここで, s_{jk} は A 型のときと同様に座標交換として作用し, t_j は変数 z_j の符号の反転, すなわち z_j を $-z_j$ で置き換える働きを持つ.

この D_j^B を用いて B_N 型の場合の生成・消滅演算子を導入しよう:

$$\begin{aligned}
\widetilde{b}_j^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\widetilde{\phi}_B^{-1}\circ(-D_j^B + z_j)\circ\widetilde{\phi}_B \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{\partial}{\partial z_j} + 2z_j - \sum_{k(\neq j)}\left\{\frac{\beta}{z_j - z_k}(1 - s_{jk}) + \frac{\beta}{z_j + z_k}(1 - t_j t_k s_{jk})\right\} + \frac{\gamma}{z_j}(1 - t_j)\right], \\
\widetilde{b}_j &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\widetilde{\phi}_B^{-1}\circ(D_j^B + z_j)\circ\widetilde{\phi}_B \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{k(\neq j)}\left\{\frac{\beta}{z_j - z_k}(1 - s_{jk}) + \frac{\beta}{z_j + z_k}(1 - t_j t_k s_{jk})\right\} + \frac{\gamma}{z_j}(1 - t_j)\right].
\end{aligned}$$

ただし, $\widetilde{\phi}_B = \prod_{k=1}^{N} \exp(-z_k^2/2)$ である.

この場合には,

$$\pi_B(\xi_j) = \frac{1}{2}\widetilde{h}_j^B \equiv \frac{1}{2}\widetilde{b}_j^\dagger \widetilde{b}_j + \frac{\beta}{2}\sum_{k(<j)} (s_{jk} + t_j t_k s_{ik}), \qquad \pi_B(x_j) = \frac{1}{2}(\widetilde{b}_j^\dagger)^2, \qquad \pi_B(s_{ij}) = s_{ij},$$

とすることにより $\mathbb{C}[z^2]$ 上の表現が得られる. ここで, 表現空間を偶数次の多項式に制限していることを注意しておく. この表現がハミルトニアン (3) に関係しているのである. 実際,

$$\mathcal{H}_B = \phi_B \circ \mathrm{Res}\left(\sum_{j=1}^{N} \widetilde{h}_j^B\right) \circ \phi_B^{-1} + \left(\frac{1}{2} + \gamma\right) N$$

として $\mathcal{H}_B$ が得られる. ただし

$$\phi_B(z) = \prod_{j<k} |z_j^2 - z_k^2|^\beta \prod_{j=1}^{N} |z_j|^\gamma \exp(-z_j^2/2)$$

は $\mathcal{H}_B$ の基底状態の波動関数である.

励起状態の波動関数を構成するためには, 次の事実が利用できる.

Proposition 2: 多項式の空間 $\mathbb{C}[x]$ から $\mathbb{C}[z^2]$ への線形写像 σ_B を次のように定義する:

$$\text{任意の} \quad f(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{C}[x] \quad \text{に対し} \quad \sigma_B\left(f(x_1, \ldots, x_N)\right) = f\left((\widetilde{b}_1^\dagger)^2/2, \ldots, (\widetilde{b}_N^\dagger)^2/2\right) \cdot 1.$$

このとき, 任意の $Q \in \pi_J(\mathfrak{H}_0')$, $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ に対し,

$$\sigma_B(Qf(x)) = \rho_B(Q)\sigma_B(f(x))$$

が成立する. ただし, $\rho_B = \pi_B \circ \pi_J^{-1}$ である.

これを用いると, 励起状態の波動関数の多項式部分は

$$L_\lambda(x) = \sigma_B(J_\lambda(x_1, \ldots, x_N)) = J_\lambda((\widetilde{b}_1^\dagger)^2/2, \ldots, (\widetilde{b}_N^\dagger)^2/2) \cdot 1 \tag{7}$$

と表される [9, 10]. この多項式はラゲル多項式を多変数化したものとみなすことができるので, (7) は多変数ラゲル多項式のオペレーター表示を与えたものと考えられる.

4 結言

ここまでに述べた内容を模式的に表すと, 次ページの図 1 のようにまとめられる. ジャック多項式に対しては, 既に多くの興味深い結果が得られているので, 図 1 の対応関係を用いれば, それらを多変数エルミート多項式・多変数ラゲル多項式に対するものに書き直すことが可能となる [10]. 例えば, ジャック多項式に対して知られていた「ロドリーグ公式」を多変数エルミート, 多変数ラゲルに対するものに書き直すことはきわめて容易である.

また, hypergeometric shift operator (隣接関係を与える作用素) の構成に対しても, 図 1 の視点は有用である. shift operator の存在自体は以前から示されていたが, 退化ダブルアフィンヘッケ代数の立場から見ると, 具体的かつ統一的に構成できるので証明が著しく簡略化される. この辺りのことについて, 詳しくは [10] を参照していただきたい.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \boxed{\begin{array}{c}\text{退化ダブルアフィンヘッケ代数 (の部分代数)} \\ \xi_j, \quad x_j, \quad s_{ij}\end{array}} & & \\
 & \pi_A \swarrow & \pi_J \downarrow & \searrow \pi_B & \\
\boxed{\widetilde{h}^A_j, \quad \widetilde{a}^\dagger_j, \quad s_{ij}} & \underset{\rho_A}{\longleftarrow} & \boxed{\hat{D}^A_j, \quad x_j, \quad s_{ij}} & \underset{\rho_B}{\longrightarrow} & \boxed{\frac{1}{2}\widetilde{h}^B_j, \quad \frac{1}{2}(\widetilde{b}^\dagger_j)^2, \quad s_{ij}} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\begin{array}{c}\text{多変数} \\ \text{エルミート多項式}\end{array} & \underset{\sigma_A}{\Longleftarrow} & \text{ジャック多項式} & \underset{\sigma_B}{\Longrightarrow} & \begin{array}{c}\text{多変数} \\ \text{ラゲル多項式}\end{array}
\end{array}
$$

図 1: 各表現の相互関係

References

[1] T.H. Baker and P.J. Forrester: preprint, solv-int/9608004, solv-int/9609010, solv-int/9612003

[2] D. Bernard, M. Gaudin, F.D.M. Haldane and V. Pasquier: J. Phys. **A26** (1993) 5219

[3] F. Calogero: J. Math. Phys. **10** (1969) 2197, J. Math. Phys. **12** (1970) 419

[4] I. Cherednik: Invent. Math. **106** (1991) 411, Commun. Math. Phys. **169** (1995) 441

[5] J.F. van Diejen: preprint, q-alg/9609032

[6] C.F. Dunkl: Trans. Amer. Math. Soc. **311** (1989) 167

[7] J.E. Humphreys: *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press 1990

[8] S. Kakei: J. Phys. **A29** (1996) L619

[9] S. Kakei: J. Phys. **A30** (1997) L535

[10] S. Kakei: preprint, solv-int/9706019

[11] I.G. Macdonald: *Symmetric functions and Hall polynomials*, second edition (Oxford mathematical monographs: Clarendon Press 1995)

[12] E.M. Opdam: Acta Math. **175** (1995) 75

[13] B. Sutherland: J. Math. Phys. **12** (1970) 246, Phys. Rev. **A4** (1971) 2019, **A5** (1972) 1372

[14] H. Ujino and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn. **65** (1996) 2423

[15] T. Yamamoto: Phys. Lett. **A208** (1995) 293