

可解格子模型と離散 Euler-Top

鈴木敏之 (Toshiyuki SUZUKI), 筧 三郎 (Saburo KAKEI)

立教大学理学部

概要

広田・木村によって与えられた離散 Euler-Top 方程式と, 統計力学の模型である 8 頂点模型に対する Yang-Baxter 方程式との関係を議論する.

§1 はじめに

「オイラーのコマ (Euler-Top)」とは, 剛体の自由回転を記述する力学系であり, 可積分系の一つの典型例である [1, 2, 3]. 剛体の慣性モーメントを対角化する座標系で記述すると, 系の時間発展は次の微分方程式で記述される:

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1(t) = (I_2 - I_3)\omega_2(t)\omega_3(t), \\ I_2 \dot{\omega}_2(t) = (I_3 - I_1)\omega_3(t)\omega_1(t), \\ I_3 \dot{\omega}_3(t) = (I_1 - I_2)\omega_1(t)\omega_2(t). \end{cases} \quad (1)$$

ただし, I_i は慣性モーメント, $\omega_i(t)$ は角速度とする ($i = 1, 2, 3$). よく知られているように, この微分方程式の解は, Jacobi の楕円関数 $\text{sn}(t)$, $\text{cn}(t)$, $\text{dn}(t)$ を用いて記述される [3, 4].

一方, 統計力学における可解模型の 1 つである 8 頂点模型 [5, 6] においては, R 行列の 0 でない成分を記述する際に, やはり Jacobi の楕円関数が現れる. オイラーのコマ, 8 頂点模型という, 2 つの可積分系が全く同じ関数で記述されることについては, 文献 [6] でも指摘されている. 本稿では, この両者の関係を明確にすることを主題とする.

§2 オイラーのコマの離散化

広田・木村両氏は, いわゆる双線型化法により, 微分方程式 (1) を次のように離散化した [7]:

$$\begin{cases} \omega_1(t + \delta) - \omega_1(t) = \delta_1 \{ \omega_2(t + \delta)\omega_3(t) + \omega_3(t + \delta)\omega_2(t) \}, \\ \omega_2(t + \delta) - \omega_2(t) = \delta_2 \{ \omega_3(t + \delta)\omega_1(t) + \omega_1(t + \delta)\omega_3(t) \}, \\ \omega_3(t + \delta) - \omega_3(t) = \delta_3 \{ \omega_1(t + \delta)\omega_2(t) + \omega_2(t + \delta)\omega_1(t) \}. \end{cases} \quad (2)$$

ただし, パラメータ δ_i ($i = 1, 2, 3$) は,

$$\delta_1 = \frac{\delta(I_2 - I_3)}{2I_1}, \quad \delta_2 = \frac{\delta(I_3 - I_1)}{2I_2}, \quad \delta_3 = \frac{\delta(I_1 - I_2)}{2I_3} \quad (3)$$

で与えられるものとする. このとき, δ_i は関係式

$$\delta^2(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) + 4\delta_1\delta_2\delta_3 = 0 \quad (4)$$

を満たすことを注意しておく.

離散方程式 (2) が極限 $\delta \rightarrow 0$ の下で (1) と一致することは明らかであろう. 極限をとった後に得られる微分方程式 (1) が楕円関数で表される解を持つことは先程述べたが, 離散方程式 (2) の厳密解も, Jacobi の楕円関数を用いて構成することができる [7].

以下では, (4) の制約を外した方程式,

$$\begin{cases} \omega_1(t + \delta) - \omega_1(t) = \Gamma_1 \{ \omega_2(t + \delta)\omega_3(t) + \omega_3(t + \delta)\omega_2(t) \}, \\ \omega_2(t + \delta) - \omega_2(t) = \Gamma_2 \{ \omega_3(t + \delta)\omega_1(t) + \omega_1(t + \delta)\omega_3(t) \}, \\ \omega_3(t + \delta) - \omega_3(t) = \Gamma_3 \{ \omega_1(t + \delta)\omega_2(t) + \omega_2(t + \delta)\omega_1(t) \}, \end{cases} \quad (5)$$

を考えることにする。ここで、 Γ_i ($i = 1, 2, 3$) は t に依存しない定数であり、 $\Gamma_i \neq 0$ とする。便宜上、以下では方程式 (5) を「拡張された離散 Euler-Top」(Generalized Discrete Euler-Top: GDET) と呼ぶことにするが、実は、方程式 (5) は広田-木村による離散 Euler-Top (2) と等価である。

Proposition 1. GDET (5) を満たす $\omega_i(t)$ が与えられたとき、

$$[I_1 : I_2 : I_3] = \left[\begin{array}{l} \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3} \mp \Gamma_2 \sqrt{-(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3)} \\ \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3} \pm \Gamma_1 \sqrt{-(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3)} : -\frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2) \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3}}{\Gamma_3} \end{array} \right] \quad (6)$$

を満たす広田-木村による離散 Euler-Top (2) の解を、スケール変換 $\omega_i(t) \rightarrow a\omega_i(t)$ として得ることができる。ただし、 a は、

$$a^2 = -\frac{\delta^2}{4} \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3}{\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3} \quad (7)$$

を満たす定数とする。

Proof. (5) を $\omega_i(t) \rightarrow a\omega_i(t)$ とスケール変換する。ただし、 $a \neq 0$ とし、 t に依存しない定数とする。すると、(5) は、

$$\begin{cases} \omega_1(t + \delta) - \omega_1(t) = a\Gamma_1 \{ \omega_2(t + \delta)\omega_3(t) + \omega_3(t + \delta)\omega_2(t) \}, \\ \omega_2(t + \delta) - \omega_2(t) = a\Gamma_2 \{ \omega_3(t + \delta)\omega_1(t) + \omega_1(t + \delta)\omega_3(t) \}, \\ \omega_3(t + \delta) - \omega_3(t) = a\Gamma_3 \{ \omega_1(t + \delta)\omega_2(t) + \omega_2(t + \delta)\omega_1(t) \}, \end{cases}$$

と書き換えられる。ここで、 $a\Gamma_i = \delta_i$ と置き、(4) に代入すれば、定数 a は (7) と定められる。次に、今得られた δ_1, δ_2 に対し、定数 I_1, I_2, I_3 を用いて、

$$\delta_1 = \frac{\delta}{2} \frac{I_2 - I_3}{I_1}, \quad \delta_2 = \frac{\delta}{2} \frac{I_3 - I_1}{I_2} \quad (8)$$

と置く。このとき (4) より、 δ_3 は $\delta_3 = \frac{\delta}{2} \frac{I_1 - I_2}{I_3}$ で与えられることが分かる。この (8) を解いて $[I_1 : I_2 : I_3]$ を定め、 $\delta_i = a\Gamma_i$ を用いれば、(6) が得られる。□

方程式 (5) は、以下のように陽的に表示することもできる：

$$\begin{aligned} \omega_1(t + \delta) &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \omega_1(t) & -\Gamma_1 \omega_3(t) & -\Gamma_1 \omega_2(t) \\ \omega_2(t) & 1 & -\Gamma_2 \omega_1(t) \\ \omega_3(t) & -\Gamma_3 \omega_1(t) & 1 \end{vmatrix}, & \omega_2(t + \delta) &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & \omega_1(t) & -\Gamma_1 \omega_2(t) \\ -\Gamma_2 \omega_3(t) & \omega_2(t) & -\Gamma_2 \omega_1(t) \\ -\Gamma_3 \omega_2(t) & \omega_3(t) & 1 \end{vmatrix}, \\ \omega_3(t + \delta) &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & -\Gamma_1 \omega_3(t) & \omega_1(t) \\ -\Gamma_2 \omega_3(t) & 1 & \omega_2(t) \\ -\Gamma_3 \omega_2(t) & -\Gamma_3 \omega_1(t) & \omega_3(t) \end{vmatrix}, & D &= \begin{vmatrix} 1 & -\Gamma_1 \omega_3(t) & -\Gamma_1 \omega_2(t) \\ -\Gamma_2 \omega_3(t) & 1 & -\Gamma_2 \omega_1(t) \\ -\Gamma_3 \omega_2(t) & -\Gamma_3 \omega_1(t) & 1 \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (9)$$

(ただし、 $D \neq 0$ を仮定しておく)。この (9) を用いて直接計算することにより、

$$\begin{aligned} \frac{\omega_2(t)\omega_1(t + \delta) - \omega_1(t)\omega_2(t + \delta)}{\omega_3(t) + \omega_3(t + \delta)} &= \frac{\Gamma_1 \omega_2^2(t) - \Gamma_2 \omega_1^2(t)}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 \omega_3^2(t)}, \\ \frac{\omega_3(t)\omega_2(t + \delta) - \omega_2(t)\omega_3(t + \delta)}{\omega_1(t) + \omega_1(t + \delta)} &= \frac{\Gamma_2 \omega_3^2(t) - \Gamma_3 \omega_2^2(t)}{1 - \Gamma_2 \Gamma_3 \omega_1^2(t)}, \\ \frac{\omega_1(t)\omega_3(t + \delta) - \omega_3(t)\omega_1(t + \delta)}{\omega_2(t) + \omega_2(t + \delta)} &= \frac{\Gamma_3 \omega_1^2(t) - \Gamma_1 \omega_3^2(t)}{1 - \Gamma_3 \Gamma_1 \omega_2^2(t)}, \end{aligned} \quad (10)$$

が導かれる. さらに (9) を用いることで, (10) の右辺が変換 $t \rightarrow t + \delta$ の下で不変である, すなわち, 保存量であることが示される. よって, $t \in \mathbb{Z}\delta$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{\omega_2(t)\omega_1(t+\delta) - \omega_1(t)\omega_2(t+\delta)}{\omega_3(t) + \omega_3(t+\delta)} &= \frac{\Gamma_1\omega_2^2(\delta) - \Gamma_2\omega_1^2(\delta)}{1 - \Gamma_1\Gamma_2\omega_3^2(\delta)}, \\ \frac{\omega_3(t)\omega_2(t+\delta) - \omega_2(t)\omega_3(t+\delta)}{\omega_1(t) + \omega_1(t+\delta)} &= \frac{\Gamma_2\omega_3^2(\delta) - \Gamma_3\omega_2^2(\delta)}{1 - \Gamma_2\Gamma_3\omega_1^2(\delta)}, \\ \frac{\omega_1(t)\omega_3(t+\delta) - \omega_3(t)\omega_1(t+\delta)}{\omega_2(t) + \omega_2(t+\delta)} &= \frac{\Gamma_3\omega_1^2(\delta) - \Gamma_1\omega_3^2(\delta)}{1 - \Gamma_3\Gamma_1\omega_2^2(\delta)}, \end{aligned} \quad (11)$$

が成り立つことが分かる.

§3 8 頂点模型

8 頂点模型における R 行列とは, 以下のように与えられる $\text{End}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ の元である:

$$\begin{aligned} R(u) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 w_i(u) \hat{l}_i \otimes \hat{k}_i \\ &= \begin{pmatrix} w_2(u) + w_1(u) & & & w_3(u) - w_4(u) \\ & w_2(u) - w_1(u) & w_3(u) + w_4(u) & \\ & w_3(u) + w_4(u) & w_2(u) - w_1(u) & \\ w_3(u) - w_4(u) & & & w_2(u) + w_1(u) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

ただし, u はパラメータであり, $\hat{l}_i, \hat{k}_i \in \text{End}(\mathbb{C}^2)$ は,

$$\hat{l}_1 = \hat{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{l}_2 = \hat{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{l}_3 = -\hat{k}_3 = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \hat{l}_4 = \hat{k}_4 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad (13)$$

で定義される. この $R(u)$ を用いて, $\text{End}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ の元 $R^{12}(u), R^{13}(u), R^{23}(u)$ を,

$$R^{12}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 w_i(u) \hat{l}_i \otimes \hat{k}_i \otimes \text{Id}_2$$

等として定める. Yang-Baxter 方程式 (YBE) とは, これらの間に成り立つ方程式である:

$$R^{12}(u)R^{13}(u+v)R^{23}(v) = R^{23}(v)R^{13}(u+v)R^{12}(u). \quad (14)$$

YBE (14) を成分表示すると, Boltzmann weight $w_j(u)$ が満たすべき関係式として, 以下の 6 つの独立な方程式を得る:

$$\left\{ \begin{array}{l} -w_1(u)w_4(u+v)w_2(v) - w_2(u)w_3(u+v)w_1(v) \\ \quad + w_3(u)w_2(u+v)w_4(v) + w_4(u)w_1(u+v)w_3(v) = 0, \\ w_4(u)w_1(u+v)w_2(v) - w_3(u)w_2(u+v)w_1(v) \\ \quad - w_1(u)w_4(u+v)w_3(v) + w_2(u)w_3(u+v)w_4(v) = 0, \\ w_1(u)w_3(u+v)w_2(v) + w_2(u)w_4(u+v)w_1(v) \\ \quad - w_4(u)w_2(u+v)w_3(v) - w_3(u)w_1(u+v)w_4(v) = 0, \\ w_3(u)w_1(u+v)w_2(v) - w_4(u)w_2(u+v)w_1(v) \\ \quad + w_2(u)w_4(u+v)w_3(v) - w_1(u)w_3(u+v)w_4(v) = 0, \\ -w_4(u)w_3(u+v)w_2(v) + w_3(u)w_4(u+v)w_1(v) \\ \quad + w_1(u)w_2(u+v)w_3(v) - w_2(u)w_1(u+v)w_4(v) = 0, \\ w_3(u)w_4(u+v)w_2(v) - w_4(u)w_3(u+v)w_1(v) \\ \quad + w_2(u)w_1(u+v)w_3(v) - w_1(u)w_2(u+v)w_4(v) = 0. \end{array} \right. \quad (15)$$

ここで, (15) を上から 2 つずつ加え, $u \rightarrow t, v \rightarrow \delta$ と置きかえると,

$$\begin{cases} w_4(t)w_1(t+\delta) - w_1(t)w_4(t+\delta) = \Delta_1\{w_2(t+\delta)w_3(t) + w_3(t+\delta)w_2(t)\}, \\ w_4(t)w_2(t+\delta) - w_2(t)w_4(t+\delta) = \Delta_2\{w_3(t+\delta)w_1(t) + w_1(t+\delta)w_3(t)\}, \\ w_4(t)w_3(t+\delta) - w_3(t)w_4(t+\delta) = \Delta_3\{w_1(t+\delta)w_2(t) + w_2(t+\delta)w_1(t)\}. \end{cases} \quad (16)$$

が得られる. ただし,

$$\Delta_1 = \frac{w_1(\delta) - w_4(\delta)}{w_2(\delta) + w_3(\delta)}, \quad \Delta_2 = \frac{w_2(\delta) - w_4(\delta)}{w_3(\delta) + w_1(\delta)}, \quad \Delta_3 = \frac{w_3(\delta) - w_4(\delta)}{w_1(\delta) + w_2(\delta)}$$

である. 以下では, (16) を YBE+ と呼ぶことにする. また, (15) を上から 2 つずつ組み合わせ, 差をとると, 以下の 3 つの方程式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{w_2(t)w_1(t+\delta) - w_1(t)w_2(t+\delta)}{w_3(t)w_4(t+\delta) + w_4(t)w_3(t+\delta)} &= \frac{w_1(\delta) - w_2(\delta)}{w_3(\delta) + w_4(\delta)}, \\ \frac{w_3(t)w_2(t+\delta) - w_2(t)w_3(t+\delta)}{w_4(t)w_1(t+\delta) + w_1(t)w_4(t+\delta)} &= \frac{w_2(\delta) - w_3(\delta)}{w_4(\delta) + w_1(\delta)}, \\ \frac{w_1(t)w_3(t+\delta) - w_3(t)w_1(t+\delta)}{w_2(t)w_4(t+\delta) + w_4(t)w_2(t+\delta)} &= \frac{w_3(\delta) - w_1(\delta)}{w_4(\delta) + w_2(\delta)}. \end{aligned} \quad (17)$$

以下では, (17) を YBE- と呼ぶことにする.

§4 離散 Euler-Top 方程式と Yang-Baxter 方程式

本節では, 拡張された離散 Euler-Top (5) と YBE との関係を議論する. 初期値が $\omega_1(0)\omega_2(0)\omega_3(0) \neq 0$ を満たす場合の GDET (5) は, 初期条件 $R(0) = P$ の下での, 8 頂点模型における YBE と等価であることを証明する.

Proposition 2. GDET (5) を満たす $\omega_i(t)$ の初期値が, 条件 $\omega_1(0)\omega_2(0)\omega_3(0) \neq 0$ を満たすとき,

$$\begin{aligned} [w_1(t) : w_2(t) : w_3(t) : w_4(t)] \\ = [\omega_1(t)\omega_2(0)\omega_3(0) : \omega_1(0)\omega_2(t)\omega_3(0) : \omega_1(0)\omega_2(0)\omega_3(t) : \omega_1(0)\omega_2(0)\omega_3(0)] \end{aligned}$$

として $w_j(t)$ ($j = 1, \dots, 4$) を定めると, 8 頂点模型に対する YBE (15) の解で, 初期条件 $R(0) = P$ を満たすものが得られる.

Proof. 与えられた $\omega_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) に対し,

$$\frac{\omega_i(t)}{\omega_i(0)} = \frac{w_i(t)}{w_4(t)} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (18)$$

と置く (このように $w_j(t)$ ($j = 1, \dots, 4$) を定めると, $(w_1(t) : w_2(t) : w_3(t) : w_4(t))$ となっている). これに $t = \delta$ を代入すれば,

$$\frac{w_1(\delta)}{w_1(0)} = \frac{w_1(\delta)}{w_4(\delta)}, \quad \frac{w_2(\delta)}{w_2(0)} = \frac{w_2(\delta)}{w_4(\delta)}, \quad \frac{w_3(\delta)}{w_3(0)} = \frac{w_3(\delta)}{w_4(\delta)} \quad (19)$$

を得る. 一方, GDET (5) において $t = 0$ とすると,

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{\omega_1(\delta) - \omega_1(0)}{\omega_2(\delta)\omega_3(0) + \omega_3(\delta)\omega_2(0)}, \\ \Gamma_2 &= \frac{\omega_2(\delta) - \omega_2(0)}{\omega_3(\delta)\omega_1(0) + \omega_1(\delta)\omega_3(0)}, \\ \Gamma_3 &= \frac{\omega_3(\delta) - \omega_3(0)}{\omega_1(\delta)\omega_2(0) + \omega_2(\delta)\omega_1(0)}, \end{aligned} \quad (20)$$

と表されることが分かる. これら (19), (20) により,

$$\begin{aligned}\Gamma_1 \frac{\omega_2(0)\omega_3(0)}{\omega_1(0)} &= \frac{w_1(\delta) - w_4(\delta)}{w_2(\delta) + w_3(\delta)}, \\ \Gamma_2 \frac{\omega_3(0)\omega_1(0)}{\omega_2(0)} &= \frac{w_2(\delta) - w_4(\delta)}{w_3(\delta) + w_1(\delta)}, \\ \Gamma_3 \frac{\omega_1(0)\omega_2(0)}{\omega_3(0)} &= \frac{w_3(\delta) - w_4(\delta)}{w_1(\delta) + w_2(\delta)},\end{aligned}\tag{21}$$

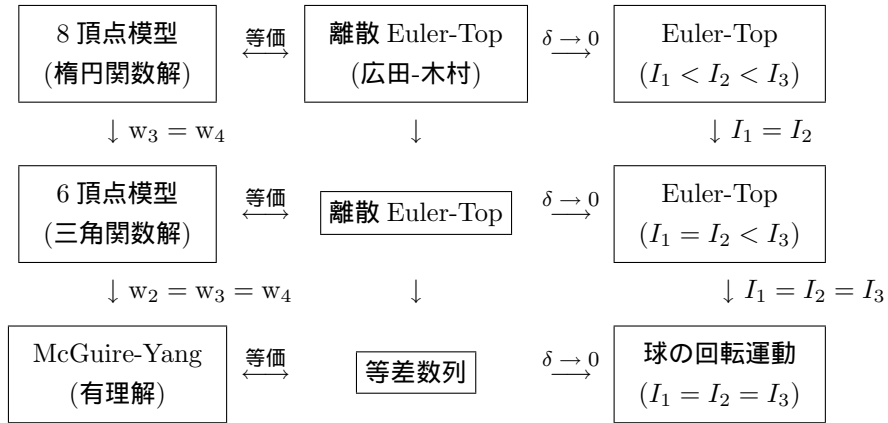
を得る. こうして得られた (18), (21) を, (5) に対して用いると YBE+ (16) が, (11) に対して用いると YBE- (17) が得られる. \square

Proposition 3. 初期条件 $R(0) = P$ を満たす YBE の解 $w_j(t)$ ($j = 1, \dots, 4$) と, 条件 $\omega_1(0)\omega_2(0)\omega_3(0) \neq 0$ を満たす定数 $\omega_i(0)$ ($i = 1, 2, 3$) が与えられたとき, Proposition 2 と同じ変換により, $\omega_1(0), \omega_2(0), \omega_3(0)$ を初期条件とする GDET の解が得られる.

Proposition 3 の証明は, 先程と同様であるので省略する. Proposition 2, Proposition 3 から, 初期条件 $\omega_1(0)\omega_2(0)\omega_3(0) \neq 0$ の GDET と, 初期条件 $R(0) = P$ の YBE とが等価であることが示された. ここで, Proposition 1 で導入した GDET と (2) との書き換えを用いると, 初期条件 $R(0) = P$ を満たす 8 頂点模型における YBE と, 初期値 $\omega_1(0)\omega_2(0)\omega_3(0) \neq 0$ の下での広田-木村による離散 Euler-Top とが等価であることが示された.

また, 8 頂点模型の R 行列 (12) において条件 $w_3 = w_4$ をおくと, R 行列の 16 個の成分のうち, 0 でない成分は 6 個になる. この場合の R 行列に対応する格子模型は, 6 頂点模型と呼ばれる. さらに, $w_2 = w_3 = w_4$ の場合は, 対応する格子模型は McGuire-Yang 模型である.

紙面の都合上詳細は割愛するが, 前節で述べた 8 頂点模型と離散 Euler-Top との関係で考えると, 8 頂点模型から 6 頂点模型への退化は, Euler-Top の慣性モーメントに $I_1 = I_2$ という制約条件を付けることに対応している. そして, McGuire-Yang 模型への退化では, さらに強い $I_1 = I_2 = I_3$ という制約条件が付くことになる. 以上の対応関係を表に示すと, 次のようになる:



§5 おわりに

本研究では, 統計力学の模型である 8 頂点模型の YBE と, 広田-木村による離散 Euler-Top [7] との関係を示した. 8 頂点模型を一般化したモデルとしては, Belavin-Baxter 模型 [8] が知られている. 現在, それに対して本稿と同様の計算をして, 高次元空間中の剛体の回転を記述するような方程式を得ることを試みているが, これまでのところはうまくいっていない.

また、可解格子模型には面模型と呼ばれるクラスがあるが、それらに対しても、Yang-Baxter 方程式を離散方程式とみなすことで離散力学系が得られる。例えば、Hard-Hexagon 模型 [9] の YBE から得られる離散方程式に対して連続極限を取ると、次の微分方程式が得られる:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \log \frac{w_2(t)}{w_1(t)} &= \dot{w}_2(0) - \dot{w}_1(0) - \dot{w}_3(0) \frac{w_3(t)w_4(t)}{w_1(t)w_2(t)}, \\ \frac{d}{dt} \log \frac{w_1(t)}{w_3(t)} &= \dot{w}_2(0) - \dot{w}_1(0) - \dot{w}_3(0) \frac{w_2(t)w_5(t)}{w_1(t)w_3(t)}, \\ \frac{d}{dt} \log \frac{w_4(t)}{w_3(t)} &= \dot{w}_2(0) - \dot{w}_5(0) - \dot{w}_3(0) \frac{w_1(t)w_2(t)}{w_3(t)w_4(t)}, \\ \frac{d}{dt} \log \frac{w_2(t)}{w_5(t)} &= \dot{w}_2(0) - \dot{w}_5(0) - \dot{w}_3(0) \frac{w_1(t)w_3(t)}{w_2(t)w_5(t)}, \\ \frac{d}{dt} \log \frac{w_4(t)}{w_5(t)} &= \dot{w}_4(0) - \dot{w}_5(0) - \dot{w}_3(0) \frac{w_2(t)w_3(t)}{w_4(t)w_5(t)}.\end{aligned}$$

この微分方程式が物理的な意味を持つかどうかは、今のところ不明である。このように、頂点模型に限らず、面模型も含めた広いクラスの可解格子模型に対して、可積分力学系との関係を明らかにしていくことは今後の課題である。

参考文献

- [1] M. Audin, *Spinning tops: a course on integrable systems*, Cambridge University Press, 1999
(日本語訳: 「コマの幾何学 - 可積分系講義 - 」, 高崎金久 訳, 共立出版, 2000)
- [2] 戸田盛和, 「波動と非線形問題 30 講」, 朝倉書店, 1995
- [3] 戸田盛和, 「楕円関数入門」, 日本評論社, 2001
- [4] 梅村浩, 「楕円関数論 - 楕円曲線の解析学 - 」, 東京大学出版会, 2000
- [5] R. J. Baxter, “Eight-vertex model in lattice statistics and one-dimensional anisotropic Heisenberg chain”, *Annals of Physics* **76** (1973) 1-24, 25-47, 48-71
- [6] L.A. Takhtadzhan and L.D. Faddeev, “The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model”, *Uspekhi Mat. Nauk* **34**:5 (1979) 13-63 (English translation: *Russian Math. Surveys* **34**:5 (1979) 11-68)
- [7] R. Hirota and K. Kimura, “Discretization of the Euler top”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **69** (2000) 627-630
- [8] A.A. Belavin, “Dynamical symmetries of integrable quantum system”, *Nucl. Phys.* **B180** (1981) 189-200
- [9] R.J. Baxter, “Hard hexagons: exact solution”, *J. Phys.* **A13** (1980) L61-L70