九州大学応用力学研究所研究集会報告 **15ME-S3** (2004) 49–57

Fibonacci 多項式の q-類似

立教大学 理学部
青木 俊一郎 (Aoki, Shun-ichirou)　 筧 三郎 (Kakei, Saburo)

Abstract

Fibonacci 多項式 $\tilde{f}(n;x)$, Lucas 多項式 $\tilde{l}(n;x)$ を, 超幾何函数との関係を通して導入し, その q-類似を考察する．この場合, (q-) 超幾何函数の隣接関係式から, 多項式の満たす三項間漸化式を得ることができる．また, Fibonacci 数が持つ mod p でのよい性質が, 多項式の場合, さらに q-類似の場合にも引き継がれることを示す.

1　はじめに

良く知られているように, Fibonacci 数列 $F(n)$ は, 漸化式

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1), \tag{1.1}$$

および初期条件 $F(1) = 1$, $F(0) = 0$ によって定義される [D, N]．また, Lucas 数列 $L(n)$ は (1.1) と全く同じ漸化式 $L(n+1) = L(n) + L(n-1)$ を満たし, かつ異なる初期条件 $L(1) = 1$, $L(0) = 2$ を満たすものとして定義される．より具体的には,

$$\begin{aligned} F(n) &: \quad 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots \\ L(n) &: \quad 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, \ldots \end{aligned}$$

と書き下すことができる.

Fibonacci 数列 $F(n)$ は, Fibonacci によって 1202 年に書かれた本 “Liber Abaci” の中にある, ウサギの繁殖パターンに関する問題の解において初めて現れたそうである．Fibonacci 数, Lucas 数に関しては, 実に多くの性質が知られている [D, N]. 以下に, 代表的なものを列挙しよう.

[de Moivre-Binet の公式]

$$\begin{aligned} F(n) &= \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left\{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right\}, \\ L(n) &= \frac{1}{2^n}\left\{\left(1+\sqrt{5}\right)^n + \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right\}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

[相互関係式]

$$\begin{aligned} F(n+1) + F(n-1) &= L(n), \\ L(n+1) + L(n-1) &= 5F(n). \end{aligned} \tag{1.3}$$

[加法公式]

$$\begin{aligned} F(n+m) &= F(m)F(n+1) + F(m-1)F(n), \\ L(n+m) &= F(m)L(n+1) + F(m-1)L(n). \end{aligned} \tag{1.4}$$

これら以外にも, 例えば, p が奇素数のとき, mod p で以下の「整除性」が成り立つことが示される.

$$\begin{aligned} F(p) &\equiv 5^{\frac{(p-1)}{2}} \equiv \begin{cases} 1 & (p \equiv \pm 1 \mod 5) \\ -1 & (p \equiv \pm 2 \mod 5) \end{cases} \\ L(p) &\equiv 1. \end{aligned} \tag{1.5}$$

数列 $F(n)$, $L(n)$ に関して, これまでに様々な形での拡張が議論されてきた．拡張の 1 つとして, 漸化式 (1.1) にパラメータ x を導入し,

$$f(n+1;x) = xf(n;x) + f(n-1;x) \tag{1.6}$$

とするものがある. 漸化式 (1.6) と, 初期条件 $f(0;x)=0$, $f(1;x)=1$ によって定義される多項式 $f(n;x)$ は Fibonacci 多項式と呼ばれており, その性質は良く調べられている [L]. また, Lucas 数列に対しても,

$$l(n+1;x)=xl(n;x)+l(n-1;x), \quad l(0;x)=2, \quad l(1;x)=x \tag{1.7}$$

によって, Lucas 多項式 $l(n;x)$ が定義される.

数列 $F(n)$, $L(n)$ が整除性 (1.5) を満たすことから, $f(n;x)$, $l(n;x)$ に対しても mod p での良い振る舞いを期待したくなるが, 残念ながらうまくいかない. そこで本稿では, mod p での良い振る舞いを保つような, 新たな Fibonacci 多項式 $\tilde{f}(n;x)$ を導入し, その性質を調べることを目的とする. 我々の意味での "Fibonacci 多項式" $\tilde{f}(n;x)$ は Gauss の超幾何級数の特殊な場合として捕らえることができ, 漸化式や相互関係式は, Gauss の超幾何函数の隣接関係式から得ることができる. また, 超幾何函数の q-類似を通して $\tilde{f}(n;x)$, $\tilde{l}(n;x)$ の q-類似を導入し, それらについての "整除性" についても議論する.

2 多項式 $\tilde{f}(n;x)$, $\tilde{l}(n;x)$

本節では多項式 $\tilde{f}(n;x)$, $\tilde{l}(n;x)$ を導入し, その性質を議論する.

通常の Fibonacci 多項式 $f(n;x)$ の場合は, 漸化式 (1.1) に基づいた拡張となっているが, ここでは de Moivre-Binet の公式 (1.2) に注目して,

$$\tilde{f}(n;x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2^n\sqrt{x}}\left\{\left(1+\sqrt{x}\right)^n-\left(1-\sqrt{x}\right)^n\right\} \tag{2.1}$$

$$\tilde{l}(n;x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2^n}\left\{\left(1+\sqrt{x}\right)^n+\left(1-\sqrt{x}\right)^n\right\} \tag{2.2}$$

によって $\tilde{f}(n;x)$, $\tilde{l}(n;x)$ を定義する. こうして定義した $\tilde{f}(n;x)$, $\tilde{l}(n;x)$ と, (1.6), (1.7) で定義される $f(n;x)$, $l(n;x)$ とは,

$$f(n;x)=2^{n-1}x^{n-1}\tilde{f}\left(n;1+\frac{4}{x^2}\right), \qquad l(n;x)=2^{n-1}x^n\tilde{l}\left(n;1+\frac{4}{x^2}\right).$$

で対応付けをすることができる.

ここで, Gauss の超幾何函数 ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ の定義を思い出しておこう [I].

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n(1)_n}x^n, \quad (a)_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} 1 & (n=0), \\ a(a+1)\cdots(a+n-1) & (n\neq 0). \end{cases}$$

これを用いると, (2.1), (2.2) は

$$\tilde{f}(n;x)=\frac{n}{2^{n-1}}{}_2F_1\left(-\frac{n}{2}+\frac{1}{2},-\frac{n}{2}+1;\frac{3}{2};x\right), \quad \tilde{l}(n;x)=\frac{1}{2^{n-1}}{}_2F_1\left(-\frac{n}{2},n+\frac{1}{2};\frac{1}{2};x\right). \tag{2.3}$$

と書き換えることができる. (2.3) は, "Gauss の公式" [G]

$$\begin{aligned}(t+u)^n+(t-u)^n &= 2t^nF\left(-\frac{1}{2}n,-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{u^2}{t^2}\right),\\ (t+u)^n-(t-u)^n &= 2nt^{n-1}uF\left(-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}n+1;\frac{3}{2};\frac{u^2}{t^2}\right),\end{aligned}$$

の特別な場合 ($t=\frac{1}{2}$, $u=\frac{\sqrt{5}}{2}$) であることを注意しておく.

超幾何函数 ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ の隣接関係式を使うと, 次のような, Fibonacci 数に対する関係式 (1.1)–(1.4) と類似の関係式が得られる.

[漸化式]

$$\begin{aligned}\tilde{f}(n+1;x) =&\tilde{f}(n;x)+\frac{(x-1)}{4}\tilde{f}(n-1;x),\\ \tilde{l}(n+1;x) =&\tilde{l}(n;x)+\frac{(x-1)}{4}\tilde{l}(n-1;x),\end{aligned}$$

[相互関係式]

$$\begin{aligned}\tilde{f}(n+1;x)+\frac{(x-1)}{4}\tilde{f}(n-1;x) =&\tilde{l}(n;x),\\ \tilde{l}(n+1;x)+\frac{(x-1)}{4}\tilde{l}(n-1;x) =&x\tilde{f}(n-1;x).\end{aligned}$$

[加法公式]

$$\begin{aligned}\tilde{f}(n+m;x) =&\tilde{f}(m;x)\tilde{f}(n+1;x)+\frac{(x-1)}{4}\tilde{f}(m-1;x)\tilde{f}(n;x)\\ \tilde{l}(n+m;x) =&\tilde{f}(m;x)\tilde{l}(n+1;x)+\frac{(x-1)}{4}\tilde{f}(m-1;x)\tilde{l}(n;x)\end{aligned}$$

これは, $x=5$ のとき, $F(n), L(n)$ の関係式に一致する.

3 q-類似

q-超幾何函数は,

$$ {}_2\phi_1(a,b;c;x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a\,;\,q)_n(b\,;\,q)_n}{(c\,;\,q)_n(q\,;\,q)_n}x^n.$$

$$(a;q)_n \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & (n=0)\\ (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1}) & (n\neq 0).\end{cases}$$

で定義されている [GR]. これをもちいて, 関係式 (2.3) に対する q-類似を考察することが, 本節の目的である.

以下では, 通常の定義とは少し変えて,

$$[n]_q \overset{\text{def}}{=} \frac{1-q^{-\frac{n}{2}}}{1-q^{-\frac{1}{2}}} = 1+q^{-\frac{1}{2}}+q^{-1}+\cdots+q^{-\frac{n-1}{2}}$$

を q-整数と呼ぶことにし, さらに, q-二項係数は,

$$\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}_q \overset{\text{def}}{=} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}$$

で定義する.

さて, $\tilde{f}_q(n;x)$, $\tilde{l}_q(n;x)$ を

$$\begin{aligned}\tilde{f}_q(n;x) &\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\sqrt{x}}\{(-q^{-\frac{1}{2}}\sqrt{x}\,;\,q^{-\frac{1}{2}})_n-(q^{-\frac{1}{2}}\sqrt{x}\,;\,q^{-\frac{1}{2}})_n\}\\ \tilde{l}_q(n;x) &\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\{(-q^{-\frac{1}{2}}\sqrt{x}\,;\,q^{-\frac{1}{2}})_n+(q^{-\frac{1}{2}}\sqrt{x}\,;\,q^{-\frac{1}{2}})_n\}\end{aligned}$$

で定義する. これは, (2.3) と同様にして,

$$\begin{aligned}\tilde{f}_q(n;x) &= q^{-\frac{1}{2}}[n]_q\,{}_2\phi_1\left(q^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}},q^{-\frac{n}{2}+1};q^{\frac{3}{2}};x\right),\\ \tilde{l}_q(n;x) &= {}_2\phi_1\left(q^{-\frac{n}{2}},q^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}};q^{\frac{1}{2}};x\right)\end{aligned} \tag{3.1}$$

と書き換えることができる．そこで, $\tilde{f}(n;x)$, $\tilde{l}(n;x)$ の場合と同様に, q-超幾何函数の隣接関係式を適宜用いると, $\tilde{f}_q(n;x),\tilde{l}_q(n;x)$ の満たす関係式を導くことができる．

[漸化式]

$$\tilde{f}_q(n+1;x)=[2]_q\tilde{f}_q(n;x)+q^{-\frac{1}{2}}(q^{-n}x-1)\tilde{f}_q(n-1;x),$$
$$\tilde{l}_q(n+1;x)=[2]_q\tilde{f}_q(n;x)+q^{-\frac{1}{2}}(q^{-n}x-1)\tilde{f}_q(n-1;x).$$

[相互関係式]

$$\tilde{f}_q(n+1;x)+(q^{-n}x-1)\tilde{f}_q(n-1;x)=q^{-\frac{n}{2}}[2]_q\tilde{l}_q(n;x),$$
$$\tilde{l}_q(n+1;x)+(q^{-n}x+1)\tilde{l}_q(n-1;x)=q^{-\frac{n}{2}}[2]_qx\tilde{f}_q(n-1;x).$$

[加法公式]

$$\begin{aligned}\tilde{f}_q(n+m;x) &= q^{\frac{1}{2}}\tilde{f}_q(m;q^{-n}x)\tilde{f}_q(n+1;x)\\ &\quad +(q^{-n-1}x-1)\tilde{f}_q(m-1;q^{-n-1}x)\tilde{f}_q(n;x) \qquad (3.2)\\ \tilde{l}_q(n+m;x) &= q^{\frac{1}{2}}\tilde{f}_q(m;q^{-n}x)\tilde{l}_q(n+1;x)\\ &\quad +(q^{-n-1}x-1)\tilde{f}_q(m-1;q^{-n-1}x)\tilde{l}_q(n;x) \qquad (3.3)\end{aligned}$$

ここで, 対応関係を記述しておくと,

$$\begin{array}{ccccc}\tilde{f}_q(n;x) & \xrightarrow[q\to 1]{} & 2^{n-1}\tilde{f}(n;x) & \xrightarrow[x=5]{} & 2^{n-1}F(n),\\ \tilde{l}_q(n;x) & \xrightarrow[q\to 1]{} & 2^{n-1}\tilde{l}(n;x) & \xrightarrow[x=5]{} & 2^{n-1}L(n).\end{array} \qquad (3.4)$$

のようになっている．この対応の下で, 上記の $\tilde{f}_q(n;x)$, $\tilde{l}_q(n;x)$ に対する関係式は, $q\to 1$ ととることで $\tilde{f}(n;x)$, $\tilde{l}(n;x)$ の関係式になり, さらに $x=5$ とおくことで $F(n)$, $L(n)$ のものになる．

上記の結果から出発すれば, 様々な関係式を導出することができる．例えば, (3.2), (3.3) において, 特に $n=1$ とすると,

$$\begin{aligned}\tilde{f}_q(m+1;x) &= [2]_q\tilde{f}_q(m;q^{-1}x)+q^{-\frac{1}{2}}(q^{-2}x-1)\tilde{f}_q(m-1;q^{-2}x),\\ \tilde{l}_q(m+1;x) &= q^{\frac{1}{2}}(q^{-\frac{3}{2}}x+1)\tilde{f}_q(m;q^{-1}x)+(q^{-2}x-1)\tilde{f}_q(m-1;q^{-2}x).\end{aligned}$$

なる関係式を得る．行列 $\boldsymbol{A}_{q,n}(x)$ を $\boldsymbol{A}_{q,n}(x)=\begin{bmatrix}[2]_q & q^{-\frac{1}{2}}(q^{-n-1}x-1)\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ で定義すると, 上の関係式より,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\tilde{f}_q(n+2;x) & \tilde{f}_q(n+1;x)\\ \tilde{f}_q(n+1;q^{-1}x) & \tilde{f}_q(n;q^{-1}x)\end{bmatrix} &= \boldsymbol{A}_{q,1}(x)\begin{bmatrix}\tilde{f}_q(n+1;q^{-1}x) & \tilde{f}_q(n;q^{-1}x)\\ \tilde{f}_q(n;q^{-2}x) & \tilde{f}_q(n-1;q^{-2}x)\end{bmatrix}\\ = \cdots &= \boldsymbol{A}_{q,n}(x)\begin{bmatrix}\tilde{f}_q(2;q^{-n}x) & \tilde{f}_q(1;q^{-n}x)\\ \tilde{f}_q(1;q^{-n-1}x) & \tilde{f}_q(0;q^{-n-1}x)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

が成立することが分かる．さらに, 両辺の行列式を計算すると,

$$\begin{aligned}\tilde{f}_q(n+1;x)\tilde{f}_q(n-1;q^{-1}x)-\tilde{f}_q(n;x)\tilde{f}_q(n;q^{-1}x) &= (-1)^nq^{-\frac{n+1}{2}}\prod_{k=1}^{n-1}(q^{-k-1}x-1)\\ &= (-1)^nq^{-\frac{n+1}{2}}(-1+q^{-2}x;q^{-1})_n\end{aligned}$$

という新しい関係式を導くことができる．ここで, $q\to 1$ とすれば,

$$\tilde{f}(n+1;x)\tilde{f}(n-1;x)-\{\tilde{f}(n;x)\}^2=(-1)^n(x-1)^{n-1}$$

が得られ, さらに $x=5$ を代入し, 2^{n-1} で割算することで

$$F(n+1)F(n-1)-\{F(n)\}^2=(-1)^n$$

という, Cassini-Simson[D, N] の結果が再現される．

4　整除性

この章では, Fibonacci 数の整除性 (1.5) の拡張について紹介する. まず, 多項式 $\tilde{f}(p;x)$, $\tilde{l}(p;x)$ の係数についての mod p リダクションを考えると,

$$\tilde{f}(p;x) \equiv x^{\frac{p-1}{2}}, \quad \tilde{l}(p;x) \equiv 1 \pmod p \tag{4.1}$$

という結果を得る. これが, $x=5$ で (1.5) と一致することは容易にわかる.

q-類似 $\tilde{f}_q(p;x)$, $\tilde{l}_q(p;x)$ については, "mod $[m]_q$" を $q^{-1/2}$ に 1 の m 乗根を代入することとして定義する. このとき,

$$[m]_q = 1 + q^{-\frac{1}{2}} + \cdots + q^{-\frac{m-1}{2}} \equiv 0 \mod [m]_q$$

であることは明らかであろう.

q-類似 $\tilde{f}_q(p;x)$, $\tilde{l}_q(p;x)$ の場合でも, (4.1) と類似の結果が成り立つ.

Proposition 4.1 (q-類似の場合の整除性).

$$\tilde{f}_q(p;x) \equiv x^{\frac{p-1}{2}}, \quad \tilde{l}_q(p;x) \equiv 1 \pmod{[p]_q}. \tag{4.2}$$

[**証明**]. $\tilde{f}_q(n;x)$ を具体的に書き下ろすと,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_q(n;x) &= \sum_{k=0}^{[\frac{p-1}{2}]} q^{-\frac{(k+1)(2k+1)}{2}} \begin{bmatrix} p \\ 2k+1 \end{bmatrix}_q x^k, \\ &= q^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}_q + q^{-3} \begin{bmatrix} p \\ 3 \end{bmatrix}_q x + \cdots + q^{-\frac{p(p+1)}{4}} \begin{bmatrix} p \\ p \end{bmatrix}_q x^{\frac{p-1}{2}} \end{aligned}$$

となることがわかる. この式の $q^{-1/2}$ に 1 の m 乗根を代入し,

$$[p]_q \equiv 0, \quad q^{-\frac{p(p+1)}{4}} \equiv 1 \pmod{[p]_q}$$

であることを用いると,

$$\tilde{f}_q(n;x) \equiv q^{-\frac{p(p+1)}{4}} x^{\frac{p-1}{2}} \equiv x^{\frac{p-1}{2}} \pmod{[p]_q}.$$

が得られる. $\tilde{l}_q(n;x)$ の場合も同様にして示される. □

5　おわりに

本稿では, Fibonacci 数列に関連した多項式 $\tilde{f}(n;x)$, $\tilde{l}(n;x)$, およびその q-類似 $\tilde{f}_q(n;x)$, $\tilde{l}_q(n;x)$ を導入し, それらの性質について議論した. 超幾何函数との関係も含めて, 対応関係をまとめると以下のようになっている.

$$\begin{array}{ccccc} \text{超幾何函数 } {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) & \xrightarrow[\text{特殊化}]{} & \text{Fibonacci 多項式} & \xrightarrow[x=5]{} & F(n) \\ \uparrow{\scriptstyle q\to 1} & & \uparrow{\scriptstyle q\to 1} & & \\ q\text{-超幾何函数 } {}_2\phi_1(a,b;c;x) & \xrightarrow[\text{特殊化}]{} & q\text{-Fibonacci 多項式} & \xrightarrow[x=??]{} & \text{“}q\text{-Fibonacci 数”} \end{array}$$

上図にあるように, 現段階では "q-Fibonacci 数" として, よい性質を持つものをどう定義したらよいかは分かっていない. 我々は「整除性」に注目した拡張を考えているので, $F(n)$, $L(n)$ の持つ整除性 (1.5) の自然な拡張になるようにしたいのであるが, 多項式 $\tilde{f}_q(n;x)$, $\tilde{l}_q(n;x)$ において x をどのように特殊化すればよいか, 現時点では不明であり, 今後の課題として挙げられる.

実は, 我々の導入した $\tilde{f}(n;x)$, $\tilde{l}(n;x)$ は Chebyshev 多項式と関係がある. Kupershmidt は, 文献において Chebyshev 多項式の mod リダクションを考察しているが, そこでの結果と我々の結果を対応付けすることで, 同様の整除性を持つがわかる.

Appendix

ここでは, $\tilde{f}(n;x)$, $\tilde{l}(n;x)$, $\tilde{f}_q(n;x)$, $\tilde{l}_q(n;x)$ の具体的な形を紹介する.

- Fibonacci 多項式 $\tilde{f}(n;x)$:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(1;x) &= 1, \quad \tilde{f}(2;x) = 1, \quad \tilde{f}(3;x) = \frac{3+x}{4}, \quad \tilde{f}(5;x) = \frac{1}{16}\left(5+10x+x^2\right), \\ \tilde{f}(7;x) &= \frac{1}{64}\left(7+35x+21x^2+x^3\right).\end{aligned}$$

- Lucas 多項式 $\tilde{l}(n;x)$:

$$\begin{aligned}\tilde{l}(1;x) &= 1, \quad \tilde{l}(2;x) = \frac{1+x}{2}, \quad \tilde{l}(3;x) = \frac{1+3x}{4}, \quad \tilde{l}(5;x) = \frac{1}{16}\left(1+10x+5x^2\right), \\ \tilde{l}(7;x) &= \frac{1}{64}\left(1+21x+35x^2+7x^3\right).\end{aligned}$$

- q-Fibonacci 多項式 $\tilde{f}_q(n;x)$:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_q(1;x) &= q^{-\frac{1}{2}}, \quad \tilde{f}_q(2;x) = q^{-\frac{1}{2}}[2]_q, \quad \tilde{f}_q(3;x) = q^{-\frac{1}{2}}[3]_q + q^{-3}x, \\ \tilde{f}_q(5;x) &= q^{-\frac{1}{2}}[5]_q + q^{-3}(1+q^{-1})[5]_q x + q^{-\frac{15}{2}}x^2, \\ \tilde{f}_q(7;x) &= q^{-\frac{1}{2}}[7]_q + q^{-3}(1-q^{-\frac{1}{2}}+q^{-1})[5]_q[7]_q x \\ &\quad + q^{-\frac{15}{2}}(1-q^{-\frac{1}{2}}+q^{-1})[3]_q[7]_q x^2 + q^{-14}x^3.\end{aligned}$$

- q-Lucas 多項式 $\tilde{f}_q(n;x)$:

$$\begin{aligned}\tilde{l}_q(1;x) &= 1, \quad \tilde{l}_q(2;x) = 1 + q^{-\frac{3}{2}}x, \quad \tilde{l}_q(3;x) = 1 + q^{-\frac{3}{2}}[3]_q x, \\ \tilde{l}_q(5;x) &= 1 + q^{-\frac{3}{2}}(1+q^{-1})[5]_q x + q^{-5}[5]_q x^2, \\ \tilde{l}_q(7;x) &= 1 + q^{-\frac{3}{2}}(1-q^{-\frac{1}{2}}+q^{-1})[3]_q[7]_q x \\ &\quad + q^{-5}(1-q^{-\frac{1}{2}}+q^{-1})[5]_q[7]_q x^2 + q^{-\frac{21}{2}}[7]_q x^3.\end{aligned}$$

References

[D] R.A. Dunlap, *The golden ratio and Fibonacci numbers*, World Scientific, 1998 (日本語訳: 「黄金比とフィボナッチ数」, 岩永・松井 訳, 日本評論社 (2003))

[G] C.F. Gauss, "Disquisitiones generales circa seriem infinitam $\left[\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}\right]x + \left[\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}\right]x^2 + \left[\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\right]x^3 +$ etc. pars prior.", *Commentationes Societiones Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores*, Vol. II (1812), Reprinted in *Gesammelte Werke*, Bd. 3 (1866), pp. 123-163 and 207-229

[GR] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series*, Cambridge University Press, Cambridge (1990)

[K] B.A. Kupershmidt, "q-analogs of classical 6-periodicity: from Euler to Chebyshev", *J. Nonlinear Math. Phys.* **10** (2003) 318-339

[I] 犬井鉄郎,「特殊函数」, 岩波全書 (1962)

[L] A. Lupas, "A guide of Fibonacci and Lucas polynomials", *Octogon Math. Magazine* **7**, No.1 (1999) 2-12

[N] 中村滋,「フィボナッチ数の小宇宙」, 日本評論社 (2002)