九州大学応用力学研究所 研究集会報告 **13ME-S4** (2002) pp.69-74

トロイダル対称性に基くソリトン方程式の (2+1) 次元化

立教大・理　筧　三郎 (Kakei, Saburo)
(岡山理科大・ 池田岳氏，京都大・高崎金久氏との共同研究)

Abstract

KdV 方程式等の代表的なソリトン方程式は (1+1) 次元の時空でのものである。これを可積分性を保ちつつ高次元に拡張する試みはいくつかあるが，ここではトロイダル・リー代数の対称性に基く方法を紹介し，これまでに知られている系との関係を議論する。

1　はじめに

KdV 方程式，非線形シュレディンガー (NLS) 方程式等のソリトン方程式は，元来 (1+1) 次元の時空における非線形波動を記述する方程式として提出された。これらに対して,「可積分性」を保ったまま高次元に拡張する試みとしては，

- KdV → Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程式
- NLS → Davey-Stewartson (DS) 方程式

の 2 例がよく知られている。これらは，それぞれ 1 成分 KP 階層，2 成分 KP 階層に対応しており，(1+1) 次元への退化はアフィン・リー代数の言葉で整理することができる [1]。

大雑把に言えば，アフィン・リー代数とはローラン多項式を成分に持つ行列の成すリー代数 (いわゆる「ループ代数」) を中心拡大したものであった。これに対し，ローラン多項式の部分を多変数にしたものの中心拡大によって得られるリー代数が，表題の「トロイダル・リー代数」である。トロイダル・リー代数は通常のアフィン・リー代数を部分代数として含むので，対称性をトロイダルに拡張するとどのようなソリトン方程式に対応するかというのは，自然な問題意識であろう [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]。

本論説では，論文 [5, 8] に基き，トロイダル対称性による拡張として，KP 方程式，DS 方程式とは異なる (2+1) 次元ソリトン方程式が現れることを解説する。具体的には，次の形の (2+1) 次元 KdV 方程式 [9, 10, 11]

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xxy} + uu_y + \frac{1}{2}u_x \int^x u_y \mathrm{d}x, \tag{1}$$

及び (2+1) 次元 NLS 方程式 [11, 12, 13]

$$\mathrm{i}u_T + u_{XY} + 2u\int^X (|u|^2)_Y \mathrm{d}X = 0, \tag{2}$$

を扱う。この 2 つの方程式が「ソリトン方程式」と呼ぶべき性質を有していることは，これまでの研究で明らかになっている。

(2+1) 次元 KdV 方程式 (1)

Lax 形式	:	Bogoyavlensky [10]
“Trilinear form”	:	Schiff [11] (ただし，この「3 次形式」は，通常の広田形式に分解可能)
N-ソリトン解	:	兪・戸田・佐々・福山 [14, 15]

(方程式 (1) に対する特殊解の振る舞いについては，1998 年度の九大応力研研究集会報告に兪らによる報告 [15] があるので，そちらを参照していただきたい。)

(2+1) 次元 NLS 方程式 (2)

Lax 形式	:	Bogoyavlensky [10], Schiff [11]
広田形式	:	Strachan [13]
N-ソリトン解	:	Sasa-Ohta-Matsukidaira [16]
保存則・パンルベ性	:	Jiang-Bullough [17]

文献 [14, 15] の N-ソリトン解の具体的な形を見ると，通常の KdV の場合との著しい類似性が見て取れる。すなわち，(2+1) 次元での場合もソリトン解は指数関数 e^{η_j} $(j=1,\ldots,N)$ の有理式であり，違いは指数関数の η_j の部分のみであることが分かる。

$$
\begin{array}{lcl}
\text{KP 階層} & : & \eta_j=(p_j-q_j)x_1+(p_j^2-q_j^2)x_2+(p_j^3-q_j^3)x_3+\cdots \\
\quad\downarrow\ q_j=-p_j\ \ \text{(2-reduction)} & & \\
\text{KdV 階層} & : & \eta_j=2p_jx_1+2p_j^3x_3+\cdots \\
\quad\downarrow\ \text{新しい変数}\ \boldsymbol{y}=(y_0,y_2,y_4,\ldots)\ \text{を導入} & & \\
\text{(2+1) 次元 KdV 階層} & : & \eta_j=2p_jx_1+2p_j^3x_3+\cdots+r_jy_0+r_jp_j^2y_2\cdots
\end{array}
$$

この事情は NLS の場合も全く同様であり，やはり違いは指数関数の η_j の部分のみである。

$$
\begin{array}{lcl}
\text{2 成分 KP 階層 (DS)} & : & \eta_j=p_jx_1^{(1)}+p_j^2x_2^{(1)}+\cdots-q_jx_1^{(2)}-q_j^2x_2^{(2)}-\cdots \\
\quad\downarrow\ q_j=p_j\ \ \text{((1,1)-reduction)} & & \\
\text{NLS 階層} & : & \eta_j=p_j(x_1^{(1)}-x_1^{(2)})+p_j^2(x_2^{(1)}-x_2^{(2)})+\cdots \\
\quad\downarrow\ \text{新しい変数}\ \boldsymbol{y}=(y_0,y_1,y_2,\ldots)\ \text{を導入} & & \\
\text{(2+1) 次元 NLS 階層} & : & \eta_j=p_jx_1+p_j^2x_2+\cdots+r_jy_0+r_jp_jy_1+\cdots
\end{array}
$$

このように，(2+1) 次元 KdV, (2+1) 次元 NLS では，KP 階層からの reduction の際に消した変数のところに，人為的に新たな変数 (上の “$\boldsymbol{y}$”) が導入されている。以下では，このような新たな変数を導入することが，対称性をアフィンからトロイダルに拡張することに対応していることを述べる。

2 トロイダル・リー代数

冒頭でも述べたように，多変数ローラン多項式を成分に持つ行列の成すリー代数を中心拡大したものが,「トロイダル・リー代数」である [18, 19]。中心拡大の部分がアフィンの場合よりやや複雑になるので，まずはその部分を述べておこう。

記号 A で 2 変数 s, t のローラン多項式全体 $\mathbb{C}[s,s^{-1},t,t^{-1}]$ を表し，(形式的) 1-form $\Omega_A = A\mathrm{d}s \oplus A\mathrm{d}t$ を考える。このとき，“canonical projection” $\bar{\cdot}$ を次のように定義する。

$$
\begin{array}{ccccc}
\bar{\cdot} & : & \Omega_A & \to & \Omega_A/\mathrm{d}A \\
 & & \cup & & \cup \\
 & & f\mathrm{d}g & \mapsto & \overline{f\mathrm{d}g}
\end{array}
$$

例えば，$\mathrm{d}(s^3t^7)=3s^2t^7\mathrm{d}s+7s^3t^6\mathrm{d}t$ なので，上の記号を用いると $3\,\overline{s^2t^7\mathrm{d}s}+7\,\overline{s^3t^6\mathrm{d}t}=0$ となる。

この記号を用いると，リー代数 $\mathfrak{g}$ に対する (2-) トロイダル・リー代数 $\mathfrak{g}^{\mathrm{tor}}$ は以下のように定義される [1]。ベクトル空間としては

$$
\mathfrak{g}^{\mathrm{tor}}=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[s,s^{-1},t,t^{-1}]\oplus\Omega_A/\mathrm{d}A
$$

であり，関係式

[1] 文献 [2, 3, 5] では，上の定義に derivation を加えた代数を扱っている。本稿の目的はソリトン方程式の理解にあるので，derivation を導入する必要はない。

- $[x \otimes a, y \otimes b] = [x, y] \otimes ab + (x|y)\overline{(\mathrm{d}a)b} \quad (x, y \in \mathfrak{g},\ a, b \in A,\ (x|y)$ は Killing form)

- $[\mathfrak{g}^{\mathrm{tor}}, \Omega_A/\mathrm{d}A] = 0$

によってリー代数の構造を入れる。このとき $u = s, t$ に対して，部分リー代数

$$\widehat{\mathfrak{g}}_u \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[u^{\pm 1}] \oplus \mathbb{C}\,\overline{\mathrm{d}\log u}$$

はアフィン・リー代数と同型になる (central element は $K_u \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{\mathrm{d}\log u}$)。

トロイダル・リー代数は三角分解を持たず，表現の一般論はまだ十分に理解されていない。しかし，次のような簡単なクラスがあることが知られている。

Proposition 1 *([19, 3])* (V, π) をアフィン・リー代数 $\widehat{\mathfrak{g}}_u$ のレベル-1 の表現 *(*すなわち $\pi(K_u) = \mathrm{id}_V$ である表現*)* とする。このとき，作用素 $X_m(z)$, $K^s_m(z)$, $K^t_m(z)$ を

$$X_m(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} X^{\pi}(z) \otimes V_m(z), \quad K^s_m(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{id}_V \otimes V_m(z), \quad K^t_m(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{id}_V \otimes \varphi(z) V_m(z),$$
$$\left(\text{ただし} \ \ \varphi(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n y_n z^{n-1}, \quad V_m(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \exp\left[m \sum_{n \in \mathbb{Z}} y_n z^n \right] \right)$$

で定義し，

$$\begin{aligned} X_m(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (X \otimes s^n t^m) \cdot z^{-n-1}, \\ K^s_m(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{s^{n-1} t^m\, ds} \cdot z^{-n}, \\ K^{t_k}_m(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{s^n t^{m-1}\, dt} \cdot z^{-n-1}. \end{aligned}$$

とおけば，トロイダル・リー代数の $V \otimes \mathbb{C}[\boldsymbol{y}, e^{\pm y_0}]$ *(*$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots)$*)* 上の表現を与える。

次節ではこの事実に基いて，トロイダル対称性の立場からの広田型方程式の導出法を述べる。

3 双線形恒等式の導出

KdV 階層，NLS 階層の双線形恒等式を導出する方法としては，

- 自由フェルミオンによる方法 [1]

- “Generalized Casimir operator” による方法 [20]

の 2 つが知られているが，ここでは前者の手法に基いて考える。庵原-斉藤-脇本 [3] は後者の手法に基いてトロイダル拡張を議論しているが，ここでの手法との同値性は現在のところ示されていない [2]。

まず，自由フェルミオンの定義を復習しておこう。KdV 階層の場合は 1 成分，NLS 階層の場合は 2 成分のフェルミオンを用いることになるが，ここでは NLS 階層を主に扱いたいので 2 成分フェルミオンの定義を述べておく [3]。

「2 成分フェルミオン」とは $\psi^{(\alpha)}_j$, $\psi^{(\alpha)*}_j$ ($j \in \mathbb{Z}$, $\alpha = 1, 2$) で生成される結合代数であり，正準反交換関係

$$[\psi^{(\alpha)}_i, \psi^{(\beta)*}_j]_+ = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}, \quad [\psi^{(\alpha)}_i, \psi^{(\beta)}_j]_+ = [\psi^{(\alpha)*}_i, \psi^{(\beta)*}_j]_+ = 0. \tag{3}$$

[2] 結果として出てくる広田方程式が同じものであることは，低次の場合には確認されている。
[3] KdV 階層に対する双線形恒等式の表現論的な導出については，[6] に日本語での解説がある。

に従うものとする。また，これらが作用する「一般化真空ベクトル」$|s_2, s_1\rangle$, およびその双対 $\langle s_1, s_2|$ を，

$$\begin{aligned}
&\psi_j^{(\alpha)}|s_2,s_1\rangle = 0 \quad (j < s_\alpha), \qquad \psi_j^{(\alpha)*}|s_2,s_1\rangle = 0 \quad (j \geq s_\alpha),\\
&\langle s_1,s_2|\psi_j^{(\alpha)} = 0 \quad (j \geq s_\alpha), \qquad \langle s_1,s_2|\psi_j^{(\alpha)*} = 0 \quad (j < s_\alpha).
\end{aligned} \tag{4}$$

で定める。さらに,「正規順序」$:\cdot:$ を

$$:\psi_i^{(\alpha)}\psi_j^{(\beta)*}: = \psi_i^{(\alpha)}\psi_j^{(\beta)*} - \langle 0,0|\psi_i^{(\alpha)}\psi_j^{(\beta)*}|0,0\rangle$$

で定義しておく。このとき，フェルミオンの 2 次式

$$\psi^{(1)}(p)\psi^{(2)*}(p), \quad \psi^{(2)}(p)\psi^{(1)*}(p), \quad :\psi^{(1)}(p)\psi^{(1)*}(p): - :\psi^{(2)}(p)\psi^{(2)*}(p):$$

という形の元が，$\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の レベル-1 の表現を生成することが知られている [1]。この $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の表現に対して前節の Proposition の結果を用いると，次の形の元が $\mathfrak{sl}_2^{\mathrm{tor}}$ の表現を生成することが分かる。

$$\begin{aligned}
&\psi^{(1)}(p)\psi^{(2)*}(p)V_n(y,p), \quad \psi^{(2)}(p)\psi^{(1)*}(p)V_n(y,p),\\
&\{:\psi^{(1)}(p)\psi^{(1)*}(p): - :\psi^{(2)}(p)\psi^{(2)*}(p):\}V_n(y,p)
\end{aligned}$$

一方，作用素 Ω^{tor} を

$$\Omega^{\mathrm{tor}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{\alpha=1,2}\oint\frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi\mathrm{i}\lambda}\psi^{(\alpha)}(\lambda)V_m(y,\lambda)\otimes\psi^{(\alpha)*}(\lambda)V_{-m}(y',\lambda)$$

で定めると，次の性質を満たすことが示される。

$$\left[\mathfrak{sl}_2^{\mathrm{tor}},\, \Omega^{\mathrm{tor}}\right] = 0, \qquad \Omega^{\mathrm{tor}}|s_1,s_2\rangle\otimes|s_1,s_2\rangle \;=\; 0 \tag{5}$$

ここから広田型微分方程式を導くために，補題を 2 つ準備しておく。

Lemma 1 *(ボソン-フェルミオン対応 [1])*

$$\begin{aligned}
&\langle s_1,s_2|e^{H(x^{(1)},x^{(2)})}\psi^{(1)}(\lambda)|\nu\rangle\\
&\quad = \;(-)^{s_2}\lambda^{s_1-1}e^{\xi(x^{(1)},\lambda)}\langle s_1-1,s_2|e^{H(x^{(1)}-[\lambda^{-1}],x^{(2)})}|\nu\rangle, &(6)\\
&\langle s_1,s_2|e^{H(x^{(1)},x^{(2)})}\psi^{(1)*}(\lambda)|\nu\rangle\\
&\quad = \;(-)^{s_2}\lambda^{-s_1}e^{-\xi(x^{(1)},\lambda)}\langle s_1+1,s_2|e^{H(x^{(1)}+[\lambda^{-1}],x^{(2)})}|\nu\rangle, &(7)\\
&\langle s_1,s_2|e^{H(x^{(1)},x^{(2)})}\psi^{(2)}(\lambda)|\nu\rangle\\
&\quad = \;\lambda^{s_2-1}e^{\xi(x^{(2)},\lambda)}\langle s_1,s_2-1|e^{H(x^{(1)},x^{(2)}-[\lambda^{-1}])}|\nu\rangle, &(8)\\
&\langle s_1,s_2|e^{H(x^{(1)},x^{(2)})}\psi^{(2)*}(\lambda)|\nu\rangle\\
&\quad = \;\lambda^{-s_2}e^{-\xi(x^{(2)},\lambda)}\langle s_1,s_2+1|e^{H(x^{(1)},x^{(2)}+[\lambda^{-1}])}|\nu\rangle, &(9)
\end{aligned}$$

ここで，$H(x^{(1)},x^{(2)})$ は $H(x^{(1)},x^{(2)}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{\alpha=1,2}\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{(\alpha)}H_n^{(\alpha)}$ である。

Lemma 2 *(Billig の Lemma [2, 3])* z についての微分作用素の族 P_j $(j\in\mathbb{Z})$ を考える。ただし，P_j は z には依存しないものとする。“母関数” $P(w) = \sum_{j\geq 0}w^jP_j$ が，ある形式的冪級数 $g(z) = \sum_j g_jz^j$ に対して $\sum_{n\in\mathbb{Z}}z^nP(n)g(z) = 0$ を満たすとき，$P(\epsilon - z\partial_z)g(z)|_{z=1} = 0.$ が成立する。ただし，ϵ は不定元である。

計算の詳細は省略するが，(5) の第 2 式に $\langle s'_1, s'_2|\mathrm{e}^{H(x^{(1)},x^{(2)})} \otimes \langle s''_1, s''_2|\mathrm{e}^{H(x^{(1)\prime},x^{(2)\prime})}$ を作用させて Lemma 1, 2 を用いることで，(2+1) 次元 NLS 階層に対する双線形恒等式が導かれる。

$$
\begin{aligned}
(-1)^{s'_2+s''_2} \oint \frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi\mathrm{i}\lambda} \lambda^{s'_1-s''_1+k-1} \mathrm{e}^{\xi(-2a^{(1)},\lambda)} \mathrm{e}^{\xi(\tilde{D}^{(1)},\lambda^{-1})} \exp\left[\sum_{\alpha=1,2}\sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(\alpha)} D_j^{(\alpha)}\right] \\
\times \quad \exp\left[-\eta(\check{b},\lambda)D_{y_0} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j D_{y_j}\right] \tau_{s_1,s_2}^{s''_1+1,s''_2} \cdot \tau_{s_1+l_1,s_2+l_2}^{s'_1-1,s'_2} \\
+ \oint \frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi\mathrm{i}\lambda} \lambda^{s'_2-s''_2+k-1} \mathrm{e}^{\xi(-2a^{(2)},\lambda)} \mathrm{e}^{\xi(\tilde{D}^{(2)},\lambda^{-1})} \exp\left[\sum_{\alpha=1,2}\sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(\alpha)} D_j^{(\alpha)}\right] \\
\times \quad \exp\left[-\eta(\check{b},\lambda)D_{y_0} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j D_{y_j}\right] \tau_{s_1,s_2}^{s''_1,s''_2+1} \cdot \tau_{s_1+l_1,s_2+l_2}^{s'_1,s'_2-1} = 0
\end{aligned}
$$

ただし，$\tau_{s_1,s_2}^{s'_1,s'_2} = \langle s'_1, s'_2|\mathrm{e}^{H(x^{(1)},x^{(2)})} g|s_1, s_2\rangle$, $\xi(x,\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j\lambda^j$, $\eta(\check{b},\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j\lambda^j$ であり，$D_j^{(\alpha)}$ 等は，対応する変数に関する広田微分である。ここに含まれる広田型微分方程式の例としては，

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
D_{x_1}^2 \tau_{0,0}^{0,0} \cdot \tau_{0,0}^{0,0} + 2\tau_{0,0}^{1,-1}\tau_{0,0}^{-1,1} & = & 0, \\
(D_{y_1} + D_{x_1}D_{y_0})\tau_{0,0}^{0,0} \cdot \tau_{0,0}^{1,-1} & = & 0, \\
(D_{y_1} + D_{x_1}D_{y_0})\tau_{0,0}^{-1,1} \cdot \tau_{0,0}^{0,0} & = & 0
\end{array}
\right.
$$

がある。これらは文献 [13, 16] で用いられている広田型方程式と一致し，

$$
u = \frac{\tau_{0,0}^{1,-1}}{\tau_{0,0}^{0,0}}, \quad u^* = \frac{\tau_{0,0}^{-1,1}}{\tau_{0,0}^{0,0}}, \quad X = \mathrm{i}x_1, \quad Y = y_0, \quad T = y_1
$$

とおけば (2+1) 次元 NLS 方程式 (2) が得られる。

同様の手法により，(2+1) 次元微分型 NLS 方程式，自己双対ヤン・ミルズ方程式に対する双線形恒等式を導くこともできる。詳細については，[8] を参照していただきたい。

4 おわりに

本稿で述べた「(2+1) 次元 NLS 階層」とは，本質的には以前の論文 [21, 22] で扱われている「ゲージ場方程式の階層」に，NLS 階層の時間発展をつけ加えたものに他ならない。ゲージ場的な時間発展と両立させるために，(2 成分)KP 階層に対して，いわゆる “reduction” の操作を加えている。ここで reduction の条件をはずすことが可能ならばより高次元のソリトン方程式が得られることになるが，現在のところはできていない。我々の観点からどの程度までのソリトン方程式を統一的に扱うことができるか，例えば [23, 24] で議論されているような高次元ソリトン方程式を扱うことができるかど うかを明らかにすることは，重要な課題であろう。

関連した話題として，論文 [25] での長波・短波相互作用のモデル方程式がある。[25] では (2) と似た形の方程式に対して，V 字型の進行波解 ([14, 15] でいうところの “V-soliton”) を広田の方法によって求めているが，(1), (2) も V 字型の進行波解を持つ。しかし，[25] の方程式が「可積分」であるかど うかは，現時点では明らかではない。

また，方程式の離散化についてであるが，(2+1) 次元 KdV 階層に含まれる変数のうち KdV 的な変数のみを離散化することは容易であり，離散 1 次元・連続 2 次元のソリトン方程式が得られる [7]。対称性をトロイダルに拡張する際に導入した変数 (前節の “$\boldsymbol{y}$”) の離散化は，現在のところはできていない。これも，今後の課題の一つである。

References

[1] M. Jimbo and T. Miwa, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **19**, 943-1001 (1983).

[2] Y. Billig, *J. Algebra* **217**, 40-64 (1999).

[3] K. Iohara, Y. Saito, and M. Wakimoto, *Phys. Lett.* **A254**, 37-46 (1999);
Erattum, *ibid.* **A268**, 448-449 (2000);
K. Iohara, Y. Saito, and M. Wakimoto, *Progr. of Theor. Phys. Suppl.* **135**, 166-181 (1999).

[4] 斉藤義久, 京都大学数理解析研究所講究録 **1221**, 38-48 (2001).

[5] T. Ikeda and K. Takasaki, *Internat. Math. Res. Notices*, No. 7, 329-369 (2001).

[6] 池田岳, 第 3 回 代数群と量子群の表現論 研究集会報告集 (2001);
池田岳, 京都大学数理解析研究所講究録 **1183**, 65-73 (2001).

[7] S. Kakei and Y. Ohta, *J. Phys.* **A34**, 10585-10592 (2001).

[8] S. Kakei, T. Ikeda and K. Takasaki, *preprint* (nlin.SI/0107065).

[9] F. Calogero, *Lett. Nouvo Cimento* **14**, 443-447 (1975).

[10] O.I. Bogoyavlensky, *Russian Math. Surveys* **45**,4 1-86 (1990).

[11] J. Schiff, in *Painlevé Transcendents*, D. Levi and P. Winternitz (eds.), NATO ASI Series B, vol. 278, Plenum Press, New York (1992)

[12] O.I. Bogoyavlensky, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Matem.* **54**, 123-131 (1990); English transl. in *Math. USSR Izv.* **36**, 129-137 (1991).

[13] I.A.B. Strachan, *J. Math. Phys.* **33**, 2477-2482 (1992); *ibid.* **34**, 243-259 (1993).

[14] Yu Song-Ju, K. Toda, N. Sasa and T. Fukuyama, *J. Phys.* **A31**, 3337-3347 (1998).

[15] 兪成周・福山武志・戸田晃一・佐々成正, 九州大学応用力学研究所 研究集会報告 9ME-S2, 85-89 (1998).

[16] N. Sasa, Y. Ohta and J. Matsukidaira, *J. Phys. Soc. Jpn.* **67**, 83-86 (1998).

[17] Z. Jiang and R.K. Bullough, *Phys. Lett.* **A190**, 249-254 (1994).

[18] C. Kassel, *J. Pure Appl. Algebra* **34**, 265-275 (1985).

[19] S. Berman and Y. Billig, *J. Algebra* **221**, 188-231 (1999).

[20] V.G. Kac and M. Wakimoto, Proc. Symposia in Pure Math. **49**, 191-273 (1989).

[21] Y. Nakamura, *J. Math. Phys.* **32**, 382-385 (1991).

[22] K. Takasaki, *Commun. Math. Phys.* **127**, 225-238 (1990).

[23] 佐々成正, 九州大学応用力学研究所 研究集会報告 9ME-S2, 142-146 (1998).

[24] 戸田晃一・兪成周・福山武志, 九州大学応用力学研究所 研究集会報告 10ME-S1, 149-153 (1999).

[25] M. Oikawa, M. Okamura and M. Funakoshi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **58**, 4416-4430 (1989).