2019 年 2 月 25 日 実施

2019 年度 （春季）

立教大学大学院理学研究科博士課程前期課程数学専攻入学試験問題

（ 数 学 ）

〔注意〕＊合図があるまでこのページをめくらないこと。

1. 解答用紙が 3 枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ。
2. 配られたすべての解答用紙に受験番号を記入せよ。
3. 解答はすべて解答用紙に記入し、問題ごとに解答用紙 1 枚を使用せよ。
4. **線形代数の問題 ([1], [2]) から 1 題、微分積分の問題 ([3], [4]) から 1 題、専門科目の問題 ([5]～[9]) から 1 題の、計 3 題を選んで解答せよ。**
5. 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ。

線形代数

[1] 実数係数の 2 次行列からなる線形空間を $M_2(\mathbb{R})$ で表す．このとき $A \in M_2(\mathbb{R})$ に対して，写像

$$f_A : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$$

を

$$f_A(X) = AX - XA$$

と定義する．このとき，以下の問に答えよ．

(i) f_A は線形写像であることを示せ．

(ii) すべての $A \in M_2(\mathbb{R})$ に対して，$\dim \mathrm{Ker} f_A \geq 1$ であることを示せ．

(iii) $\dim \mathrm{Ker} f_A = 4$ を満たすような $A \in M_2(\mathbb{R})$ をすべて求めよ．

(iv) 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と定める．このとき $\mathrm{Ker} f_A$ を決定せよ．

[2] 変数 t についての 3 次以下の実数係数多項式からなる線形空間を V とする：

$$V = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

このとき，以下の問に答えよ．

(i) 実数 α について，V からそれ自身への線形写像 P を

$$P(v) = (t+1)\frac{dv}{dt} - \alpha v, \quad v \in V$$

と定める．基底 $\{1, t, t^2, t^3\}$ による P の表現行列を求めよ．

(ii) P が全射となるための α の条件を求めよ．

(iii) P が全射とならないとき，$\mathrm{Ker}\, P$ の次元を求めよ．

(iv) P が全射となるとき，方程式

$$P(v) = t^3$$

の解を求めよ．

微分積分

[3] 実数 x に対して，$\mathbf{e}(x)$ を

$$\mathbf{e}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

と定義する．このとき以下の問に答えよ．

(i) 任意の実数 x に対して，級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

が絶対収束することを示せ．

(ii) 任意の実数 x と y について

$$\mathbf{e}(x+y) = \mathbf{e}(x) \cdot \mathbf{e}(y)$$

が成り立つことを示せ．

(iii) 極限値

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

を求めよ．

[4] $\mathbb{R}^3$ の部分集合 D_1，D_2，D を

$$D_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}, \quad D_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq \frac{1}{2}\},$$

$$D = D_1 \cap D_2$$

と定義する．このとき以下の問に答えよ．

(i) D の体積を求めよ．

(ii) D の表面積を求めよ．

専門科目

[5] 素数 p に対して $R_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}$ とおく．このとき以下の問に答えよ．

(i) R_p が可換環であることを示せ．

(ii) R_7 が体であることを示せ．

(iii) R_{13} が体でないことを示せ．

[6] $\mathbb{Q}$ の拡大体 $M = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2+\sqrt{5}}\right)$ について，以下の問に答えよ．

(i) 実数 $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $f(x)$ と M の $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数を求めよ．

(ii) M の $\mathbb{Q}$ 上のガロア閉包 L を求めよ．

(iii) ガロア群 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ を求めよ．

(iv) $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ の部分群のうち，位数 4 の巡回群となるものをすべて求めよ．

(v) (iv) で求めた巡回群について，それぞれの群で固定される L の部分体を求めよ．

[**7**] 3 次元実線形空間

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

における 2 点 $x = (x_1, x_2, x_3)$ と $y = (y_1, y_2, y_3)$ の距離を

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

と定義する．このとき，以下の問に答えよ．

(i) 距離空間 $(\mathbb{R}^3, d)$ における開集合の定義を述べよ．

(ii) $\mathbb{R}^3$ から有限個の点 $\{P_1, \cdots, P_n\}$ を除いた集合は開集合であるか，理由を述べて答えよ．

(iii) 自然数 k に対して

$$Q_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$$

とおくとき，$\mathbb{R}^3$ から無限個の点 $\{Q_k\}_{k \geq 1}$ を除いた集合は開集合であるか，理由を述べて答えよ．

[**8**] S^3 と $D^2 \times S^1$ をそれぞれ

$$S^3 = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\right\},$$

$$D^2 \times S^1 = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, |z_1| \leq \frac{1}{\sqrt{2}},\ |z_2| = 1\right\}$$

と定義する．ただし $\mathbb{C}^2$ は複素 2 次元線形空間を表し，2 点 $z = (z_1, z_2)$ と $w = (w_1, w_2)$ の距離 $d(z, w)$ を

$$d(z, w) = \sqrt{|z_1 - w_1|^2 + |z_2 - w_2|^2}$$

と定義して距離空間とする．このとき，以下の問に答えよ．

(i) S^3 の部分空間 X_1 を

$$X_1 = \left\{(z_1, z_2) \in S^3 \,\middle|\, |z_1| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

と定義する．このとき X_1 は $D^2 \times S^1$ と同相であることを示せ．

(ii) S^3 の部分空間 X_2 と T^2 をそれぞれ

$$X_2 = \left\{(z_1, z_2) \in S^3 \,\middle|\, |z_2| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \quad T^2 = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z_1| = |z_2| = 1\right\}$$

と定義する．このとき $X_1 \cap X_2$ は T^2 と同相であることを示せ．

[9] 有理型関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{\cot(\pi z)}{z^2+4}$$

と定義し，2 以上の自然数 N に対し，複素平面 $\mathbb{C}$ における 4 点 $\left\{\pm(N+\frac{1}{2}) \pm \sqrt{-1}(N+\frac{1}{2})\right\}$ を結んでできる正方形を正の向きに回る閉路を C_N とする．このとき，以下の問に答えよ．

(i) C_N 内にある $f(z)$ の極をすべて挙げ，そこでの $f(z)$ の留数を求めよ．

(ii) C_N に沿った線積分は

$$\lim_{N\to\infty} \int_{C_N} f(z)dz = 0$$

を満たすことを示せ．

(iii) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$$

の値を求めよ．