2018年7月15日 実施

2019年度 (夏季)
立教大学理学研究科博士課程前期課程数学専攻入学試験問題
(数 学)

[注意] ∗ 合図があるまでこのページをめくらないこと.

- 配られたすべての解答用紙に受験番号を記入せよ.
- 線形代数の問題 ([1], [2]) から 1 題, 微分積分の問題 ([3], [4]) から 1 題, 専門科目の問題 ([5]~[9]) の中から 1 題の, 計 3 題を選んで解答せよ.
- 解答はすべて解答用紙に記入し, 問題ごとに解答用紙 1 枚を使用せよ.
- 解答用紙が 3 枚配られていることを確認せよ. そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ.
- 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ.

線形代数

[1] (i) $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への線型写像 F を

$$F: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

とするとき, $\mathrm{Im}\, F$ の次元を求めよ.

(ii) $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\, F$ に含まれることを示せ.

(iii) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ は $\mathrm{Ker}\, F$ の基底か？まず主張（YES or NO）を明らかにした上で, その主張を証明せよ.

(iv) $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^4$ への線型写像 G を

$$G: \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 + y_2 + \alpha y_3 \\ 2y_1 + y_2 - 2y_3 \\ -y_1 - y_2 + 3y_3 \\ -y_2 + 3y_3 \end{pmatrix} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

とする. また $\mathrm{Ker}\, F$ と $\mathrm{Im}\, G$ で張られる $\mathbb{R}^4$ の部分空間を V とおく. V の次元が 3 であるような α の値を求めよ.

[2] a, b, c を実数として, 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$$

が $\det A = 1$ を満たすとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(i) A のすべての固有値を a, b, c を用いて表せ.

(ii) k を正の整数とする. A^k のすべての固有値を a, b, c, k を用いて表せ.

(iii) ある正の整数 n で, $A^n = I_2$ なるものがあるとき,

$$(a + c)^2 - 4 \leq 0$$

であることを示せ. ただし, I_2 は 2 次の単位行列を表すものとする.

(iv) A が相異なる 2 つの固有値を持つとする. また, ある正の整数 m があり, A^m が固有値 1 を重複度 2 で持つとする. このとき, $A^m = I_2$ であることを示せ.

(v) $A^8 = I_2$ かつ, 1 以上 7 以下のすべての整数 i に対して $A^i \neq I_2$ であるとする. さらに, $b = -a^2$ であるとする. これらの条件を満たす A を全て求めよ.

微分積分

[3] θ を $0 < \theta < 2\pi$ を満たす実数とする. n を非負の整数とする.

(i) 等式

$$1 - e^{i\theta} = -2ie^{\frac{i}{2}\theta} \sin \frac{1}{2}\theta$$

を示せ.

(ii)

$$\left| \sum_{0 \le k \le n} e^{ik\theta} \right| \le \left| \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\theta} \right|$$

を示せ.

(iii) 不等式

$$\left| \sum_{0 \le k \le n} 2^{-k} e^{ik\theta} \right| \le \left| \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\theta} \right|$$

を示せ.

(iv) 単調減少する正の実数列 $c_1, c_2, \ldots$ が $\lim_{k \to \infty} c_k = 0$ を満たすとする. この時,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ik\theta}$$

は収束することを示せ.

[4] $\mathbb{R}^2$ の領域 D, D_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \ge 0, x + y < 1\}, \quad D_n = \{(x, y) \in D \mid x + y \le 1 - \frac{1}{n}\}$$

と定める. 正の実数 α に対し D 上の関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \frac{1}{(1 - x - y)^{\alpha}}$$

と定める.

(i) $\displaystyle\int_{D_n} f(x, y)dxdy$ を n および α で表せ.

(ii) 広義積分 $\displaystyle\int_{D} f(x, y)dxdy$ が収束するための必要十分条件を α で表し, そのときの広義積分の値を求めよ.