2014 年 7 月 20 日 実施

2015 年度 夏季
理学研究科博士課程 前期課程 数学専攻 入学試験問題
(数 学)

[注意]

- 配られたすべての解答用紙に受験番号を記入せよ.
- **線形代数の問題** ([1], [2]) **から 1 題，微分積分の問題** ([3], [4]) **から 1 題，専門科目の問題** ([5]～[9]) **の中から 1 題の，計 3 題を選んで解答せよ.**
- 解答はすべて解答用紙に記入し，問題ごとに解答用紙 1 枚を使用せよ.
- 解答用紙が 3 枚配られていることを確認せよ．そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ.
- 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ.

線形代数

[1] (i) 実ベクトル空間 V に属するベクトル $v_1, \dots, v_r$ が一次独立であることの定義を述べよ．

(ii) 実ベクトル空間 V に属するベクトル $v_1, \dots, v_r$ が V の基底をなすことの定義を述べよ．

(iii) 次のベクトルの張る $\mathbb{R}^4$ の部分空間の基底と次元を求めよ．

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(iv) V を 3 次以下の実係数多項式のなす実ベクトル空間とする．線形写像 $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(x)\,dx, \quad \psi(f) = f''(1) - f'(1) \quad (f \in V)$$

と定義する．このとき，V の部分空間 $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Ker}(\psi)$ の基底と次元を求めよ．ただし，ψ の定義において，$f'(1)$ は多項式 $f(x)$ の導関数 $f'(x) = \dfrac{df}{dx}(x)$ の $x = 1$ での値，$f''(1)$ は多項式 $f(x)$ の 2 階導関数 $f''(x) = \dfrac{d^2 f}{dx^2}(x)$ の $x = 1$ での値である．

[2] a を実数とし，3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，以下の問に答えよ．

(i) A の固有多項式を求めよ．

(ii) A が対角化可能であるための a の条件を求めよ．

(iii) (ii) の条件が満たされないとき，A のジョルダン標準形 J とそのときの変換行列 P を求めよ．すなわち，$P^{-1}AP = J$ となる J, P を求めよ．

微分積分

[3] (i) s を実数として，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s(n+1)}$ を考える．

(a) $s = 0, 1, -1$ に対し，この無限級数が収束するか発散するかを，理由を付して述べよ．

(b) 実数 s に対し，この無限級数が収束するか発散するかを，理由を付して述べよ．

(ii) (a) 関数 $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ が $x = 0$ で連続であることの定義を述べよ．

(b) 連続関数 $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ について，

$$\lim_{a \to 0} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} f(x)\, dx = f(0)$$

となることを証明せよ．

[4] 積分 $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{(t+1)(t+3)}\, dt$ について，以下の問に答えよ．ただし，$x > 0$ とする．

(i) 積分 $F(x)$ を計算せよ．

(ii) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} (F(x) - \log x)$ を求めよ．

専門科目

[5] 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合 A, B を次で定める．

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 z^2 = 1\}$, $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^4 + z^8 = 1\}$.

集合 A, B はコンパクトであるかどうかを調べよ．

[6] 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ を考える．

(i) A の単因子標準形（スミス標準形）を求めよ．

(ii) $\mathbb{Z}^3$ で整数を成分とする 3 次元縦ベクトルが加法に関してなすアーベル群を表し，

$$A\mathbb{Z}^3 = \{Av \mid v \in \mathbb{Z}^3\}$$

とおく．このとき，剰余群 $\mathbb{Z}^3/A\mathbb{Z}^3$ を巡回群の直積として表せ．

(iii) $\mathbb{Z}^3/A\mathbb{Z}^3$ の部分群で位数 12 のものは何個あるか．

[7] $\mathbb{Q}$ を有理数体とし，1 の原始 24 乗根 $\zeta = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{24}\right)$ を考える．このとき，以下の問に答えよ．

(i) $\mathbb{Q}(\zeta)$ の $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数を求めよ．

(ii) $\mathbb{Q}(\zeta^3) = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{2})$ であることを示せ．

(iii) $\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{2}, \sqrt{-3})$ であることを示せ．

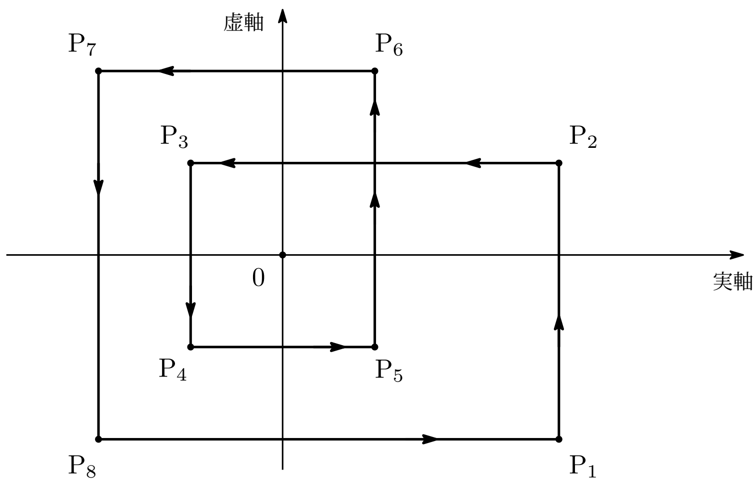
(iv) $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ のガロア群を巡回群の直積として表せ．

[8] (i) 複素変数 z の複素関数 $f(z)$ が，複素平面上の単連結領域 D で正則であるとする．このときに $f(z)$ について成り立つ「コーシーの積分定理」とはどのような定理であるかを述べよ (証明は必要ない)．

以下では $f(z) = \dfrac{\sin(\pi z)}{z^2(2z-1)^2}$ とする．また，i は虚数単位を表す．

(ii) $f(z)$ の極をすべて求め，それぞれの極の位数と留数を求めよ．

(iii) 複素平面上の 8 点 $\mathrm{P}_1 \sim \mathrm{P}_8$ を，それぞれ $1-\dfrac{2i}{3}$, $1+\dfrac{i}{3}$, $\dfrac{-1+i}{3}$, $\dfrac{-1-i}{3}$, $\dfrac{1-i}{3}$, $\dfrac{1+2i}{3}$, $\dfrac{-2+2i}{3}$, $\dfrac{-2-2i}{3}$ に対応する点とする (下図)．これらの点を $\mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_2 \to \mathrm{P}_3 \to \mathrm{P}_4 \to \mathrm{P}_5 \to \mathrm{P}_6 \to \mathrm{P}_7 \to \mathrm{P}_8 \to \mathrm{P}_1$ の順に直線で結んで得られる閉曲線を C とする．ただし，C の向きは下図の矢印によって定められているものとする．



このとき，複素積分 $\displaystyle\oint_C f(z)dz$ の値を求めよ．

[9] u, v を変数とする 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v)$ の第 2 基本形式を $\mathrm{II} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ とする．曲面上の点 P において，$LN - M^2 = 0$ かつ $L^2 + M^2 + N^2 \neq 0$ となるとき，点 P を放物点という．

関数 $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ を C^2 級の関数で，$f(t) > 0$ $(t \in (0, \infty))$ を満たすものとする．曲面 S を $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \theta) = (f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, t)$ $\;(t \in (0, +\infty),\ \theta \in \mathbb{R})$ で定める．このとき，以下の問に答えよ．

(i) 曲面 S の第 2 基本量 L, M, N を求めよ．

(ii) 曲面 S 上の任意の点が放物点であるための必要十分条件は，$f(t) = a$（$a > 0$ は定数）または，$f(t) = at + b$（$a > 0$，$b > 0$ はともに定数）を満たすことであることを示せ．