2013 年 7 月 21 日 実施

2014 年度 夏季
理学研究科博士課程 前期課程 数学専攻 入学試験問題
(数 学)

［注意］

- 配られたすべての解答用紙に受験番号を記入せよ．
- **線形代数の問題 ([1], [2]) から 1 題，微分積分の問題 ([3], [4]) から 1 題，専門科目の問題 ([5]〜[9]) の中から 1 題の，計 3 題を選んで解答せよ．**
- 解答はすべて解答用紙に記入し，問題ごとに解答用紙 1 枚を使用せよ．
- 解答用紙が 3 枚配られていることを確認せよ．そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ．
- 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ．

線形代数

[1] 実数を成分とする 2 次正方行列のなすベクトル空間 $M_2(\mathbb{R})$ の部分空間 V を

$$V = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(X) = 0\}$$

で定める．ここで，$\mathrm{Tr}(X)$ は行列 X のすべての対角成分の和である．V の基底 E_1, E_2, E_3 を次の行列で定める．

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

また，2 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とし，V の線形変換 φ を $\varphi(X) = AX - XA$ で定める．

(i) 線形変換 φ の基底 E_1, E_2, E_3 についての表現行列を求めよ．

(ii) 線形変換 φ の固有値を求めよ．

(iii) 線形変換 φ の表現行列が対角行列となるような V の基底を 1 組求め，E_1, E_2, E_3 の式で表せ.

[2] $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間 V の線形変換 $f : V \longrightarrow V$ が，ある整数 $n \geq 2$ に対して，$f^n = f$ をみたすとする．線形変換 f の核空間，像空間を，それぞれ $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ で表す.

(i) $\mathrm{Im}(f^{n-1}) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つことを示せ.

(ii) $\mathrm{Ker}(f^{n-1}) = \mathrm{Ker}(f)$ が成り立つことを示せ.

(iii) $V = \mathrm{Im}(f^{n-1}) + \mathrm{Ker}(f)$ が成り立つことを示せ.

微分積分

[3] 次の級数が収束するか発散するかを述べ，そのことを証明せよ．

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

[4] (i) a を正の実数とするとき，$e^{-ax^2} \leq e^{-ax}$ が任意の $x \geq 1$ に対して成り立つことを示せ．

(ii) a を正の実数とするとき，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx$ が収束することを示し，その値を求めよ．

(iii) 正の実数 x, y に対して，$f(x, y) = e^{-x^2 y} \sin y$ とする．任意の $0 < R_1 < R_2$ について，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x, y) dx$ が y の閉区間 $[R_1, R_2]$ で一様収束することを示せ．

(iv) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$ であることを示せ．ただし，次の命題は証明せずに用いてよい．

[命題] $f(x, y)$ は区間 $[0, \infty) \times [0, \infty)$ で連続で，次の 2 つの条件をみたすものとする．

[条件 1] $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x, y) dx$ は y の任意の閉区間 $[R_1, R_2]$ で一様収束．

[条件 2] $\displaystyle\lim_{\substack{R_1 \to +0 \\ R_2 \to \infty}} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{R_1}^{R_2} f(x, y) dy \right\} dx = \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} f(x, y) dy \right\} dx.$

このとき，$\displaystyle\int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} f(x, y) dx \right\} dy$ も収束し，

$$\int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} f(x, y) dy \right\} dx = \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} f(x, y) dx \right\} dy.$$

専門科目

[5] 位数 8 の非アーベル群（非可換群） G の単位元を e とおく．また，G の各元 g に対して，g の位数 (order) を $\mathrm{ord}(g)$ とおく．

(i) $\mathrm{ord}(a)=4$ をみたす $a \in G$ が少なくとも 1 つ存在することを示せ．

(ii) $\mathrm{ord}(a)=4$ をみたす $a \in G$ を 1 つ選び，a で生成される G の巡回部分群を $H=\langle a\rangle$ とおく．このとき，H は G の正規部分群であることを示せ．

(iii) H に属さない任意の元 $b \in G$ に対して，$b^{-1}ab=a^3$ が成り立つことを示せ．

[6] 可換環 $R=\{0,1,a_1,a_2,\ldots,a_{p-2}\}$ の元の個数 p が 3 以上の素数であるとする．

(i) $H_i=\{x \in R \mid a_i x=0\}$ $(i=1,2,\ldots,p-2)$ とおく．このとき，各 H_i は R のイデアルであることを示せ．

(ii) R は整域であることを示せ．

(iii) a_i で生成される R のイデアルを I_i $(\subset R)$ とおく．このとき，$I_i=R$ を示せ．

(iv) R は体であることを示せ．

[7] 距離空間 (X,d) に対して，関数 $\bar{d}: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ を次式で定める．

$$\bar{d}(x,y)=\min\{d(x,y),\ 1\}$$

(i) $\bar{d}$ は X 上の距離関数であることを示せ．

(ii) $\bar{d}$ の定める X の位相は d の定める X の位相と一致することを示せ．

[8] N を自然数として，$\{a_1,a_2,\ldots,a_N,q\}$ を複素平面上の相異なる $N+1$ 個の点とする．領域 $\mathbb{C}\setminus\{a_1,a_2,\ldots,a_N,q\}$ 上の関数 $f_N(z)$ を

$$f_N(z)=\frac{1}{q-z}\prod_{j=1}^{N}\frac{q-a_j}{z-a_j}$$

で定める．$k=1,2,\ldots,N$ に対して，$z=a_k$ における $f_N(z)$ の留数を $r(N,k)$ とする．また，$S_N=r(N,1)+r(N,2)+\cdots+r(N,N)$ とする．

(i) $r(N,k)$ $(k=1,2,\ldots,N)$ を q, a_1, a_2, $\ldots$, a_N を用いて表せ．

(ii) $S_1=S_2=S_3$ を示せ．

(iii) 自然数 N を 1 つ選んで固定するとき，複素平面上の円 C_N は次の 2 条件をみたすものとする：

- C_N の中心は原点，
- $N+1$ 個の点 $\{a_1,a_2,\ldots,a_N,q\}$ はすべて C_N の内部にある．

また，C_N の向きは反時計回りとする．複素積分 $\displaystyle\oint_{C_N} f_N(z)dz$ を用いて，自然数 N をどのように選んでも $S_N=S_1$ であることを示せ．

[9] $\boldsymbol{p}(s)$ を，開区間 $I=(a,b)$ 上で定義された $s \in I$ を孤長径数とする空間曲線とし，すべての $s \in I$ に対して，$\boldsymbol{p}(s)$ は半径 $R>0$ の一定の球面上に存在していると仮定する．このとき，$\boldsymbol{p}(s)$ の曲率 $\kappa(s)$ は $\kappa(s) \geq \dfrac{1}{R}$ をみたすことを示せ．