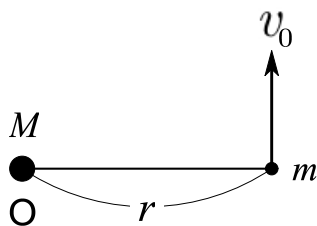


2012年度  
理学研究科物理学専攻博士課程前期課程 入学試験問題（物理学）

[注意]

- 配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ。
- 大問は6題。
  - ・理論物理学研究室を第1志望とする場合は大問1～4の4題を解答せよ。
  - ・原子核放射線物理学研究室，または宇宙地球系物理学研究室を第1志望とする場合は，大問1～6のうち，4題を選択して解答せよ。
- 大問1問につき解答用紙1枚を用い，解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。
- 解答用紙が4枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること。
- 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること。

1. 図のように、原点  $O$  に質量  $M$  の物体が静止している。原点からの距離が  $r$  の点で、質量  $m$  の物体  $A$  を動径に垂直な方向に速さ  $v_0$  で投じる。万有引力定数を  $G$  として、以下の問いに答えよ。



- (a)  $r = R_0$  の点で投じたとき、物体  $A$  は円軌道を描いた。距離  $R_0$  を求めよ。  
 (b)  $r = R_1$  のとき、物体の軌道は放物線になった。距離  $R_1$  を  $R_0$  で表せ。  
 (c) 投じる点の距離  $R_2$  が  $R_1$  より大きい場合、物体  $A$  の軌道は何という曲線になるか。また、無限遠における物体  $A$  の速さを求めよ。  
 (d) 投じる点の距離  $R_3$  が、 $R_0$  と  $R_1$  の間にある場合、その後の運動における原点から物体  $A$  までの距離の最大値を  $R_1, R_3$  で表せ。

2. 以下の問いに答えよ。

- (a) 真空中の Maxwell 方程式を微分形で書け。ただし、真空の誘電率  $\epsilon_0$ 、真空の透磁率  $\mu_0$ 、電場  $\vec{E}$ 、磁束密度  $\vec{B}$ 、電流密度  $\vec{j}$ 、電荷密度  $\rho$  とせよ。  
 (b) Maxwell 方程式を使って、真空中を伝播する電磁波の方程式を求める。以下の i, ii に答えよ。  
 i. 一般のベクトル  $\vec{A}$  が以下の関係を満たすことを示せ。  

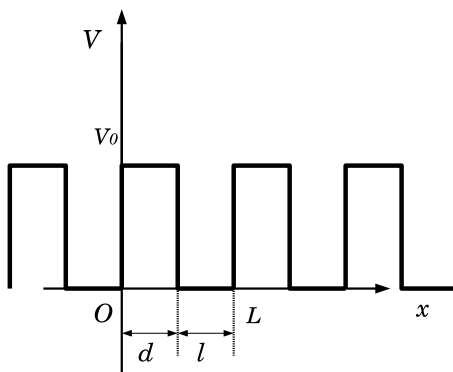
$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$
  
 ii. Maxwell 方程式から  $\vec{B}$  を消去し、 $\vec{j} = 0, \rho = 0$  であること、および上の関係式を用いて、真空中を伝播する電磁波を表す波動方程式が以下のようなことを示せ。また、電磁波が真空中を伝播する速度を求めよ。

$$\nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

3. 図に示されている1次元周期的ポテンシャル  $V(x)$

$$V(x) = V(x+L) \quad \text{かつ} \quad V(x) = \begin{cases} V_0 & (0 \leq x < d) \\ 0 & (d \leq x < d+l) \end{cases}$$

での質量  $m$  の粒子のエネルギー固有状態を考える。ただし  $L = d+l$  とする。以下の問いに答えよ。



(a) エネルギー固有値  $E$  が  $0 < E < V_0$  であるとき、区間  $0 < x < L$  での波動関数  $u(x)$  は

$$u(x) = \begin{cases} A_1 \exp(\kappa x) + A_2 \exp(-\kappa x) & (0 \leq x < d) \\ B_1 \exp(ikx) + B_2 \exp(-ikx) & (d \leq x < d+l) \end{cases}$$

と書ける。正の定数  $\kappa$  および  $k$  を求めよ。ただし  $A_1, A_2, B_1, B_2$  は定数である。

(b)  $x$  方向に  $L$  だけ平行移動する変換  $\hat{T}$  とこの系のハミルトニアン  $\hat{H}$  が可換であることを示せ。

(c)  $\hat{T}$  と  $\hat{H}$  の可換性に着目して、波動関数  $u(x)$  として次のような形の関数を選ぶことができることを証明せよ。

$$u(x) = v(x) \exp(i\alpha x)$$

ただし  $v(x) = v(x+L)$  であり、 $\alpha$  は実数定数である。

(d) エネルギー固有値  $E$  が  $0 < E < V_0$  にあるような状態を考えよう。エネルギー固有値  $E$  はある行列の行列式をゼロとすることで求まる。そのような行列を求めよ。

(e) (d) で得られた行列式を計算して整理すると、(a) で求めた  $\kappa, k$  を用いて、

$$\cos(kl) \cosh(\kappa d) + \frac{\kappa^2 - k^2}{2\kappa k} \sin(kl) \sinh(\kappa d) = \cos(\alpha L)$$

という式が得られる。この式に基づいて、粒子のとりうるエネルギー固有値がいくつかのエネルギー領域(エネルギーバンド)にわかれ、それらの中には粒子がとることのできないエネルギー領域(エネルギーギャップまたはバンドギャップ)があることを示せ。このようなエネルギー準位の構造をバンド構造という。

4. 以下の問いに答えよ。

- (a) 質量数  $A$  の大きな原子核の密度分布は一様密度の球で近似でき、その半径  $R$  は  $R = r_0 A^{1/3}$  で与えられる。このことから原子核の密度が質量数に依存せずほぼ一定であることを示せ。またその一定値は何  $\text{kg}/\text{m}^3$  になるか。計算して有効数字一桁で答えよ。ただし、 $r_0 = 1.2 \text{ fm} = 1.2 \times 10^{-15} \text{ m}$  とし、陽子と中性子の質量はそれぞれ  $M_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $M_n = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$  であるとする。
- (b) 原子核の内部の様子を記述するため、核子を、原子核の大きさの箱型ポテンシャルの中を自由に運動するフェルミ粒子であると仮定するモデルを考える。このモデルではエネルギーが  $E$  と  $E + dE$  の間にある中性子が取りうる状態数  $n(E)dE$  は

$$n(E)dE = \frac{2^{1/2} M_n^{3/2} V}{\pi^2 \hbar^3} E^{1/2} dE$$

となることを示せ。ただし、 $V$  は原子核の体積である。

- (c) 原子核の中性子数を  $N$  とする。中性子のフェルミエネルギー  $E_F$  を  $\hbar, M_n, r_0, A, N$  を用いて表せ。
- (d) 原子核の全核子のうち6割が中性子であるとする。 $\hbar c = 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ , 中性子の静止エネルギーを  $940 \text{ MeV}$  であるとして、 $E_F$  を計算して求めよ。ただしは単位は  $\text{MeV}$  とし有効数字一桁で答えよ。

5. 以下のような1次元の井戸型ポテンシャルに束縛された1個の粒子（質量： $m$ ）について考える。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq L) \\ \infty & (x < 0, x > L) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ。

- (a) Schrödinger 方程式を解き、規格化された固有関数  $\psi_n(x)$  を求めよ。
- (b) エネルギー固有値  $E_n$  を求めよ。
- (c) 基底状態と第1励起状態の固有関数が直交することを示せ。
- (d) 不確定性関係を使って粒子の運動エネルギーを評価し、(b) で求めた結果と定性的に一致することを確かめよ。

6. 以下の I, II の各問いに答えよ。

- I (a) 球面極座標  $(r, \theta, \phi)$  を使って、半径  $r$  の球面上の微小面積  $ds$  を表せ。  
 (b) 上の結果を積分して、半径  $R$  の球面の面積が  $4\pi R^2$  となることを示せ。  
 (c) 上の結果を用いて、半径  $R$  の球の体積を求めよ。  
 (d) 上の (a) の微小面積  $ds$  を  $r^2$  で割った  $d\Omega = \frac{ds}{r^2}$  は、原点から見たときに  $ds$  を見込む微小立体角である。図 1 のように球面に内接する円板を、球の中心  $O$  から見込む立体角はいくらか。点  $O$  と円板の中心を結ぶ線分と、 $O$  と円周上の 1 点とを結ぶ線分のなす角を  $\theta_0$  とする。

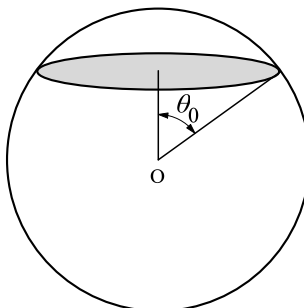


図 1

- II 検出器に入射する  $\gamma$  線のうち、光電効果として観測される割合を検出効率と呼ぶ。図 2 のように、半径  $R$ 、高さ  $2R$  の円柱形の NaI シンチレーション検出器の底面を線源に向け、線源から放出される単一エネルギーの  $\gamma$  線を測定して、検出効率を求める実験を行った。線源は検出器円柱の軸上にあり、検出器底面との距離は  $d$  であった。 $R$  と比べて  $d$  は十分大きく、 $\gamma$  線は検出器底面に垂直に入射すると考えて良いものとする。

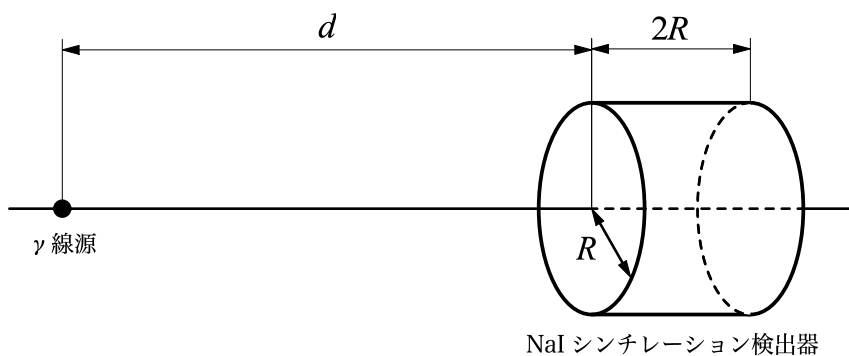


図 2

- (a) 線源の  $\gamma$  線強度 (単位時間に線源から放出される  $\gamma$  線の数) が  $N$  のとき、単位時間に観測された光電効果の計数率は  $n$  であった。この検出器の検出効率はいくらか。誤差は考えなくてよく、線源から検出器を見込む立体角を  $\Omega$  として答えよ。  
 (b) 線源から放出される  $\gamma$  線に対する NaI の光電効果の吸収係数を  $k$  とする。光電効果以外の相互作用が無視できる場合、入射面からの距離が  $x$  の点における  $\gamma$  線強度  $I(x)$  は、 $I(x) = I(0) \exp(-kx)$  に従って減少する。 $I(0)$  は、検出器に入射する  $\gamma$  線強度である。この検出器内で  $\gamma$  線が光電効果を起こす確率  $P$  を求めよ。

- (c) 検出器円柱の直径が7.5cm であるとき、この確率  $P$  はいくらになるか。この  $\gamma$  線に対する光電効果の吸収係数は、 $0.029 \text{ cm}^{-1}$  である。テイラー展開の1次の項までとった近似値で答えよ。
- (d) 図3に結果を示す実験における検出効率の実測値は、 $0.40 \pm 0.03$  であった。これと上の(c)で求めた確率とを比較し、その違いの原因について考察せよ。

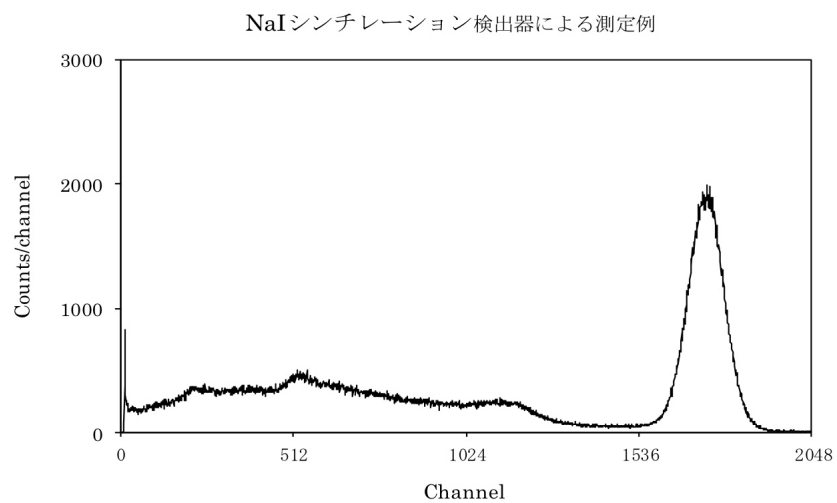


図3