

1 講義内容について

ここでは「線形代数」という講義がどういう内容のものか簡単に説明します。まず、前期の「線形代数 1」では、講義のほとんどの時間を行列の計算、特に「基本変形」という操作を用いた計算に費やします。基本変形というのは、連立方程式を解くためのプロセスを行列の計算におきかえたもので、これを用いて変数の数が多い連立方程式を解いたり、サイズの大きい行列の逆行列を求めたり、「行列式」という数を計算したりといったことが可能になります。

大学生になって習う数学が連立方程式の解き方とはびっくりするかもしれませんが、もちろん本当の目的は連立方程式を解くことではないので、答が出せれば計算方法なんてどうでもいい、という態度だと後々困ることになります。

高校の数学 C では行列の計算規則を学んだ後で、連立方程式への応用の他に、1 次変換という、ベクトルをベクトルに移す操作を勉強します。大学でも (サイズの大きい) 行列 A を (成分の数が多い) ベクトル v にかけて別のベクトル Av に変換するという操作を学び、これを「線形写像」と呼びます。ここで本質的なことは、「行列をベクトルにかける」という具体的な計算方法ではなく、この操作が、ベクトル u, v 、スカラー k に対して

$$A(u + v) = Au + Av, \quad A(ku) = kAu$$

という性質を持つということで、この性質を「線形性」といいます。言葉で表すと、ベクトルを足して (スカラー倍して) から変換して得られるベクトルは、それぞれを変換してから足し合わせた (スカラー倍した) ベクトルに等しい、となります。これは、比例関係と同様の性質であり、他にも、関数を微分したり積分したり、といった操作でも成り立ちます。

そこで、行列について学んだことを同じ性質をもつような他の問題にも応用することを考えます。そのために、線形写像というものを「足し算とスカラー倍という計算ができるもの (ベクトル) の集合」(これを「線形空間」といいます) の間の変換という風に、抽象化された空間の間の操作ととらえ、具体的な行列の計算を線形空間の構造を調べるために用います。

このように、抽象化された空間で問題をとらえると、たとえばある種の微分方程式の解 (関数) の集合が、行列を通して勉強した線形空間と全く同じ構造を持っていることがわかったり、また、量子力学の基礎概念を学ぶときにも大いに役立ちます。

講義の目標は、このような一般化や抽象化された概念を理解することですが、上に書いたように、線形代数 1 では、行列の計算練習がメインで、「線形空間」という考え方は講義の後半に、「線形写像」については線形代数 2 の講義で行います。さらに、他の数学や物理学との関連を学ぶのは 2 年生以降になりますので、理解を焦る必要はありませんが、ちゃんと先につながる内容だと意識して勉強することを薦めます。

2 参考書について

講義の指定教科書は

「初歩から学べる線形代数」佐藤恒雄・野澤宗平著、培風館 (2007)。

となります。講義はほぼこの教科書に沿って行います。毎回どの部分を解説するかはシラバスに書きましたので、どのくらいのペースで進むか確認しておいてください。初回は予定を変更して第2章(シラバスでは2回目)から始めるので、後で第1章の前半の内容を解説します。

基本的に、教科書を読んで、講義と演習を受け、先生や先輩や友人と話をしていれば他の本を買わなくても勉強できると思いますが、ここでいくつか参考書をあげておきます。線形代数の参考書は大量にありますので、とても目を通してられませんが、この分野の定番的な教科書は

- 1 「線型代数入門」齋藤正彦著, 東京大学出版会 (1966).
- 2 「線型代数学」佐武一郎著, 裳華房 (1974).

であるということは知っておいて損はないと思います。この2冊の本も指定した教科書も、定理の証明がきちんと書いてあるタイプの本なのですべて読み通すのは大変ですが、もう少しあっさりポイントが述べてある本がよい場合は

- 3 「入門線形代数」三宅敏恒著, 培風館 (1991).

あたりは読みやすいと思います。ただ、この本だと講義の内容すべては網羅していません。他にも学生向けの参考書で「分かりやすい」「単位がとれる」といったことを強調している本もたくさんありますが、これらの本でとりあえず最低限必要な計算の仕方だけ見ておいて、後でじっくり勉強するといった使い方もあり得ると思います。

また、数学を理解するためには問題演習は不可欠ですが、問題集としては、

- 5 「明解演習 線形代数」小寺平治著, 共立出版 (1982).
- 6 「弱点克服 大学生の線形代数」江川博康著, 東京図書 (2006).

などは、高校数学の参考書のように例題の解法が説明されているスタイルの本なので、自習用としては使いやすいと思います。

3 高校数学での関連分野

高校数学で、直接この講義と関連する部分は

数学 B ベクトル (平面ベクトル, ベクトルの内積, 空間座標とベクトル)

数学 C 行列 (行列の演算, 逆行列, 1 次変換)

になります。特に行列は講義の初回から使いますので、自信がなければ復習しておいてください。他には、数学 B の「数列」で習った総和記号 \sum が使いこなせることも必要です。後は、数学 C の「式と曲線」(2 次曲線, 曲線の媒介変数表示) を、講義の後半 (12 月ごろ?) に少しだけ扱います。

4 行列の定義と基本演算

上にも書いたように、講義は教科書第2章からはじめますので、1回目の講義で話す予定だったことをここに記しておきます。

指定した教科書では、第1章に行列に関する用語や計算方法がまとめてあります。ここではその中から必要な部分をピックアップして解説を加えます。ポイントのみ整理しておくので、教科書購入後に内容を確認してください。特に注意して欲しいのは、大学の数学の講義では、具体的な数を使った表示よりも、 m, n, i, j などの文字を使って数式を説明することが多いことです。このような説明のしかたに抵抗を感じる場合は、必ず自分で $m = 1, n = 2$ の場合はどうなるか、といったようなことをゆっくりと書きながら勉強してください。

行列

行列 (英語だと matrix) とは数を縦横に並べたものである。たとえば

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & -2 & 1 \\ -2 & 9 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

などである。行列において、横に並んだ数の列を行 (row)、縦に並んだ数の列を列 (column) という。上の例では A は行が2つ、列が2つあるので2行2列、 B は2行4列、 C は3行2列の行列である。いくつかの数が並んでるかを一般的に表して、行が m 個、列が n 個の行列を

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

のように表す。 m 行 n 列に並んでいることを強調するときは $m \times n$ 行列という。特に、 n 行 n 列であるとき n 次正方行列という。また、第 i 行、第 j 列に配置された数 a_{ij} は、行列 A の (i, j) -成分と呼ばれる。(1) の例でいえば、 $a_{11} = 4, a_{12} = 9, a_{21} = -2, a_{22} = 9$ である。

ちなみに行列を丸い括弧で $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ のように書かずに角ばった括弧で $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ としているのは見栄えの問題で特に意味はない。実際は丸い括弧を使うことも多い。しかし縦棒で挟まれた $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ というものは「行列式」といい、行列とは別物(6月ごろに解説します)になるので注意すること。

行列をひとまとめに扱うときには、上で A, B, C を用いたように大文字の英字を用いることが多い。また、全ての成分が0である行列を零行列といい、 O で表す。

特に1行 n 列の行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

は n 次行ベクトル, m 行 1 列の行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},$$

は m 次列ベクトルという. 列ベクトルは a, b, c のような太文字で表すことが多く, $m \times n$ 行列も m 個の成分からなる縦ベクトルを n 個横に並べたものとみなして

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

と表すことがあり, 積などの計算のときに便利である.

行列の相等

二つの行列 A, B が, 同じ型 (すなわち行数と列数がそれぞれ同じ) であり, かつ対応する全ての成分が等しいときに $A = B$ と表す.

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

並んでいる数がすべて同じでも, たとえば $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ と $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ は行列としては違うものである.

行列の演算

高校数学で習うように, 行列は和・差, 積, 定数倍 (スカラー倍), といった演算ができる. 和は成分同士の和

$$A = [a_{ij}], \quad B = [b_{ij}] \Rightarrow A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

で定義される. ここで A と B がちがうサイズの行列のときは, 和は定義できない.

また, スカラー倍は

$$A = [a_{ij}], \quad c \text{ はスカラー} \Rightarrow cA = [ca_{ij}]$$

で定義される. これらの演算について, 数どうしの和や定数倍の持つ性質と同様な関係式

$$\begin{aligned} A + B &= B + A, & (A + B) + C &= A + (B + C), \\ (a + b)A &= aA + bA, & a(A + B) &= aA + aB, & (ab)A &= a(bA) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで A, B, C は行列, a, b はスカラー.

積の計算は、やや複雑である。高校数学で習った 2 行 2 列の行列の積は

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cb + ds \end{bmatrix}$$

であった。この「ある行の成分とある列の成分をかけて足し合わせる」という操作は、高校数学の「1 次変換の合成」と対応しているのであった。サイズの大きい行列の掛け算も、この公式を自然に拡張したものになる。たとえば

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -6 \\ 4 & -1 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -31 \\ 21 & -53 & 47 \end{bmatrix}$$

となる。どのように計算したかという、 AB の 11 成分は A の 1 行目 $[7 \ 2 \ -6]$ と、 B の 1

列目 $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ の成分を順に掛けて足し合わせ

$$7 \times 1 + 2 \times 4 + (-6) \times 3 = -3$$

AB の 12 成分は A の 1 行目 $[7 \ 2 \ -6]$ と、 B の 2 列目 $\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ の成分を順に掛けて足し合わせ

$$7 \times (-4) + 2 \times 2 + (-6) \times (-5) = 6$$

という要領で、 A の i 行目と B の j 列目の成分を、順にかけて足し合わせたものが AB の ij 成分となる。よって掛け算は A の行の数と B の列の数が等しい場合のみ定義でき、上の例では BA という掛け算は実行できない。

以上を踏まえて積の公式を述べる。行列 $A = [a_{ij}]$ が $m \times n$ 型、行列 $B = [b_{ij}]$ が $n \times l$ 型 (すなわち A の列数と B の行数が同じ) であるときに、それらの積 AB を次のように定義する。

$$AB = [c_{ij}], \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}. \quad (2)$$

結果として得られる行列 AB は $m \times l$ 型となる。ぱっと見ただけでは規則がわかりにくいかもしれないので、22 行列の場合に書いてみると (こういうことを普段の勉強で行うこと!),

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

である。ここで添字のつけ方に注目すれば、 AB の ij 成分が

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} = \sum_{k=1}^2 a_{ik}b_{kj}$$

となっていることがわかる (添字だけ見ると i と j が外側にあり、内側の k について足し合わされている)。実はこの計算では、具体的に数字の入った行列の掛け算を行うことよりも、積と添

字の関係 (2) を理解してきちんと書けることの方が重要ともいえる。こういう計算が自在にできるようになることは相対性理論を勉強するときにも必須事項となる。さらに「線形性」の意味が理解できれば、規則を「暗記する」ことにこだわる必要もなくなるが、それは先の話。

また、行列 B を n 次列ベクトルを使って表示すると

$$AB = A \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_l \end{bmatrix}$$

のように、各列ごとに A を掛けて得られる m 次列ベクトル Ab_j を並べたものになっている。これも計算するときには便利な表示である。

行列の積に関しては

$$(AB)C = A(BC), \quad A(B+C) = AB+AC, \quad a(AB) = A(aB) = (aA)B$$

が成り立つが、交換法則は成り立たないことを注意しておく。すなわち、一般には $AB \neq BA$ である。

転置行列

行列 A に対し、その第 1 行を第 1 列に、その第 2 行を第 2 列にというように、行と列を入れ換えたものを転置行列といい tA , A^T などで表す (以下では前者の記号を用いる)。すなわち、 $A = [a_{ij}]$ に対して tA の (i, j) -成分は a_{ji} である:

$$A = [a_{ij}] \Rightarrow {}^tA = [a_{ji}]$$

たとえば

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -6 \\ 4 & -1 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^tA = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & -1 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$$

である。行列 A が $m \times n$ 型であるとき、転置行列 tA は $n \times m$ 型となる。

${}^tA = A$, すなわち $a_{ij} = a_{ji}$ となるような行列を対称行列, ${}^tA = -A$, すなわち $a_{ij} = -a_{ji}$ となるような行列を交代行列という。

正方行列 A の逆行列

行列 A の (i, j) -成分が, $a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ となるような n 次正方行列を単位行列といい, 記号 I で表すことにする。正方行列 A に対して,

$$PA = AP = I$$

を満たす正方行列が存在するとき, この P を A の逆行列といい, 記号 A^{-1} で表す。正方行列 A が逆行列を持つとき, A を正則行列という。

5 課題

行列 $A = [a_{ij}]$ が $m \times n$ 型, 行列 $B = [b_{ij}]$ が $n \times l$ 型るとき, それらの積 AB と転置のあいだに

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$$

が成り立つことを示せ.

何をするかというと, 積 AB の転置行列の ij 成分と, 転置行列 tB と tA の積の ij 成分をそれぞれ計算して一致することを示せということです.

意味がわからなければ, 具体的に 22 行列や 23 行列, 33 行列くらいで両辺を計算してみて, 何を言っているのかゆっくり考えてください.

答は教科書を購入後, p.12 を見れば書いてあります.