微分積分１の自習について

上野 隆彦

新入生の皆様，入学おめでとうございます．

微分積分１の講義ではテキストとして三宅敏恒著【入門　微分積分】（培風館）を用います．

テキストを持っているなら，テキストに収録されている２章，３章の問題を出来る範囲で解いてみて下さい（半分くらいは解けるだろうと思います）．また，最初の数回の講義で第６章および第１章を紹介する予定ですので，目を通しておくと良いでしょう．

テキストを持っていない場合は，高校のときの数学の教科書，参考書などを見て，微分積分の計算に不安がないことを確認しておいて下さい．

数列の極限

自然数，整数，有理数，無理数，実数，…

これらの数の集合について，我々は既に知っている．高校の教科書には，

自然数…ものの個数や順番を表す数の集合．1, 2, 3, $\cdots$.

整数…自然数と負の符号をつけた自然数および 0 からなる数の集合.

有理数…整数 m と 0 でない整数 n を用いて，m/n の形で表される数の集合.

無理数… $\sqrt{2}$, π などの有理数でない数の集合.

実数…有理数と無理数をあわせた数の集合.

という記載がある．

いま演算 “ $*$ ” を考えられる集合 A について考える．A の要素 a, b に対して，その演算の結果 $a * b$ が常に A に含まれるとき，A において，その演算を ◯ と表し，演算の結果 $a * b$ が A に含まれるとは限らないときは，△ で表すことにする．例えば，自然数という集合では足し算 $+$ が考えられる．二つの自然数 m, n に対して，$m + n$ は自然数となる．また，整数という集合で割り算 $\div$ を考えることができるが，二つの整数 m, n に対して，m/n は整数とは限らない．したがって，自然数では演算 $+$ は ◯ であり，整数では演算 $\div$ は △ となる．

自然数，整数，有理数の３つの集合で，基本的な四則演算―加減乗除―を考えると以下の表を得る．

	加法	減法	乗法	除法
自然数	◯	△	◯	△
整数	◯	◯	◯	△
有理数	◯	◯	◯	◯

水に塩を溶かすという操作をした後に，やっぱり塩を取り出すという操作は簡単にはできないが，もし簡単にできるなら，きっと便利なことだと想像することはできる．演算でも何かを足したり，乗じたりした後に，その逆の操作を自由にできれば都合が良いことだろう．

そこで自然数と演算 $+$, $\times$ を出発点とし，演算 $+$ の逆演算 $-$ を自由に考えられるように集合を広げると整数

が得られる．更に演算 $\times$ の逆演算 $\div$ を自由に考えられるように集合を広げると有理数が得られる．つまり自然数から出発して加法，乗法とその逆演算を自由に実行できる世界として有理数が得られる．

有理数という集合では，加減乗除の演算を自由に行えるのだが，一つ困った点がある．それは『身近なところに有理数でない数が存在している』という事実だ．例えば「一辺の長さが 1 の正方形の対角線の長さ a」を考えよう．三平方の定理より $a^2 = 2$ がわかるが，そのような a は有理数でないことが背理法で証明できる（確認せよ）．このような数は無数にあるが，それらをどのように捉えることができるだろうか．上の a を例に見てみよう．

$1^2 = 1,\ 2^2 = 4$ であるから，a は $1 < a < 2$ を満たすであろう．同じく $1.4^2 = 1.96,\ 1.5^2 = 2.25$ なので，a は $1.4 < a < 1.5$ を満たすであろう．以下，同様に試して行くと

$$\begin{array}{ll}
1 < a < 2, & (1^2 = 1,\ 2^2 = 4) \\
1.4 < a < 1.5, & (1.4^2 = 1.96,\ 1.5^2 = 2.25) \\
1.41 < a < 1.42, & (1.41^2 = 1.9881,\ 1.42^2 = 2.0164) \\
1.414 < a < 1.415, & (1.414^2 = 1.999396,\ 1.415^2 = 2.002225) \\
1.4142 < a < 1.4143, & (1.4142^2 = 1.99996164,\ 1.4143^2 = 2.00024449) \\
\vdots &
\end{array}$$

が得られる．この a をはさむ左側の有理数を並べると，$a_1 = 1,\ a_2 = 1.4,\ a_3 = 1.41,\ a_4 = 1.414,\ a_5 = 1.4142, \cdots$ という数列が得られる．この数列 $\{a_n\}$ は有理数からなるので二乗して 2 になる数が表れることはない．したがって，上の操作は有限回で終わることはなく，この数列は無限に続く数列であることがわかる．また，この数列の第 n 項と第 $n+1$ 項の間には $a_n < a_{n+1}$ という関係がある．特に $-10 \leqq a_n \leqq 10$ [*1]である．このような数列 $\{a_n\}$ を「有界な単調増加数列」と表現する．

ここまでを簡単にまとめると，二乗したときに 2 なる数は有理数ではない．しかしながら，有理数からなる単調数列 $\{a_n\}$ で二乗したときに 2 に近づいていくものがある，ということが示されている．[*2]

テキストにある実数の連続性の公理「有界な単調数列は収束する」は，「有界な単調数列に対して，対応する「数」があると考える」という主張である．この主張を認めれば，上の数列 $\{a_n\}$ に対応する数がある，と考えられる．もっと一般に「単調で有界な有理数列」の収束先として「実数」という集合が認識されることになる．こうして考える実数には，有理数でない数が無数に含まれる．このとき有理数自身も実数に含まれることになる[*3]が，$\sqrt{2}$ などの有理数でないものも実数に含まれる．

我々は自然数から出発して四則演算を自由に扱える有理数を考えた．さらに有理数に数列と極限という概念を導入して実数にたどりつく．そうして手に入れた実数の世界で，四則演算はどうなっていると考えられるだろうか．それに答えているのが定理 1.1.1 である．

定理 1.1.1 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする．このとき，以下の式が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha + \beta,\ \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta,\ \lim_{n\to\infty}(b_n^{-1}) = \beta^{-1}\ (\beta \neq 0 \text{ のとき})$$

[*1] もちろん $-2 \leqq a_n \leqq 2$ でもあるし，$1 \leqq a_n < 1.5$ でもある．ここでは「すべての a_n が適当に規定された範囲内にある」といいたいだけである．

[*2] そのような性質を持つ数列は無数にある．たとえば先程の a をはさむ右側の有理数を並べると「有界な単調減少数列」が得られるが，この数列も二乗したときに単調に 2 に近づいていく，という性質を持っている．

[*3] 有理数 2 は，$a_1 = 2,\ a_2 = 2,\ a_3 = 2, \cdots$ の極限でもあるし，$b_n = 2 - 1/n$ の極限でもある．

コラム

有理数，実数などの関係は，ここまでに見てきた．しかし「円周率 π は有理数か？」という問にはどう答えよう？ 1761 年にランベルトは「x が有理数ならば $\tan x$ は無理数である」ことを示し π が無理数であると主張した（証明の不備を 1806 年にルジャンドルが補った）．

問．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ は上に有界な単調増加数列であることを示せ．

上の数列の極限を $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ で表す．e はおよそ 2.71 くらいである．e や π は無理数，更には超越数であることが知られているが，$e+\pi$ が無理数かどうかはわかっていない．

級数について

数列 $\{a_n\}$ に対して $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ を第 n 部分和という．この数列 $\{S_n\}$ の極限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ のことを $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ とも表す．

すべての n に対して $a_n \geqq 0$ であるとき，$S_{n+1} \geqq S_n$ なので，数列 $\{S_n\}$ は単調増加数列である．したがって，数列の公理「上に有界な単調増加数列は収束する」を適用して，

正項級数の収束

数列 $\{a_n\}$ の各項が $a_n \geqq 0$ を満たすとき，数列 $\{S_n\}$ が有界ならば級数は収束する．更に数列 $\{a_n\}$ の順番を入れ替えて数列 $\{b_n\}$ が得られたとき，$\{b_n\}$ から得られる正項級数も収束し，その和は $\lim_{n\to\infty} S_n$ に一致する．

が成り立つ（証明はテキスト 142 ページ）．

絶対収束

数列 $\{a_n\}$ に対して $\sum |a_n|$ が収束するとき，$\sum a_n$ は絶対収束するという．絶対収束するならば級数は収束する．更に数列 $\{a_n\}$ の順番を入れ替えて数列 $\{b_n\}$ が得られたとき，$\{b_n\}$ から得られる級数も収束し，その和はもとの級数の和に一致する．

級数の収束，発散については「どういう級数が収束し，どういう級数が発散するかという知識を持つことと収束判定法についての知識を持つこと」が重要である．絶対収束しない級数の収束は微妙なバランスの下で成り立っている．

例．数列 $\{(-1)^{n-1}n^{-1}\}$ を考える．この数列より得られる級数，

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$$

は $\log 2$ に収束することが知られている．一方，

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

は発散するので絶対収束はしていない．絶対収束しない級数を条件収束級数という．条件収束する級数では項の順序を適当に入れ替えることによってどんな値にも収束させることができる．それを見ておこう．$A = \left\{\frac{1}{2n-1}\right\}$，$B = \left\{-\frac{1}{2n}\right\}$ とおくと A は数列の正の項，B は数列の負の項の集合である．このとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2n}\right)$$

はともに発散する．

上の数列 $A = \{a_n = \frac{1}{2n-1}\}$，$B = \{b_n = -\frac{1}{2n}\}$ を用いて 1.2 に収束する級数を作ってみよう．それには $a_1 + \cdots + a_k > 1.2$ となる最小の k を見つけ出し，続けて $a_1 + \cdots + a_k + b_1 + \cdots + b_l < 1.2$ となる最小の l を見つけ出す．次に $a_1 + \cdots + a_k + b_1 + \cdots + b_l + a_{k+1} + \cdots + a_m > 1.2$ となる最小の m を見つけ出し，続けて $a_1 + \cdots + a_k + b_1 + \cdots + b_l + a_{k+1} + \cdots + a_m + b_{m+1} + \cdots + b_n < 1.2$ となる最小の n を見つけ出す．この操作を繰り返せばよい．今の例では，

$$a_1 + a_2, \quad (a_1 + a_2) + b_1, \quad (a_1 + a_2) + b_1 + (a_3 + a_4 + a_5), \quad (a_1 + a_2) + b_1 + (a_3 + a_4 + a_5) + b_2$$ [*4]

[*4] 参考までに，この数列を小数第 3 位で四捨五入して得られる数列を初項から書き並べていくと，
1.33, 0.83, 1.29, 1.04, 1.21, 1.04, 1.22, 1.09, 1.22, 1.12, 1.23, 1.14, 1.20, 1.13, 1.21, 1.15, 1.21, $\cdots$
1.2 をはさんで振幅が次第に小さくなっていく点に注意せよ．

が，求める数列となる．こうして得られる数列が 1.2 に近づくことは明らかであろう．正項級数の収束判定条件はテキスト p143–p145 に記載されている．

問題１．次の数列は有界で単調増加であることを示せ．また，その極限値を求めよ

$$(1)\ a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} \qquad (2)\ a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}$$

(テキスト p.9, 1.1.2.).

問題２．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ は収束することを示せ

(テキスト p.146, 6.1.6).

【問題 1 解答】問題の数列が下に有界であることを示すには $a_n > 0$ を示せばよい．(1), (2) とも帰納法で示せる [(2) (i) $a_1 = 1 > 0$ である．(ii) $a_k > 0$ を仮定する．このとき $3a_k + 4 > 0,\ 2a_k + 3 > 0$ である．したがって，$\frac{3a_n+4}{2a_n+3} > 0$ となる].

上に有界であることを示す．

▹ (1) の数列の最初の数項は，

$$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{\sqrt{2}+1},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1},\ \cdots$$

である．目的は「この数列がある数を超えないことを示す」なので大雑把に $a_n < 2$ くらいを示すとよいだろう．

(1) $a_n < 2$ を示す．

(i) $a_1 = 1 < 2$ なので $n = 1$ では成り立っている．

(ii) $a_k < 2$ を仮定する．このとき，

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k + 1} < \sqrt{2+1} = \sqrt{3} < 2$$

となり，$a_{k+1} < 2$ が成り立つ．

(i), (ii) よりすべての自然数 n について $a_n < 2$ が示された．特に数列 $\{a_n\}$ は有界である．

(2) 漸化式を書き直すと，

$$a_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2(2a_n + 3)}$$

である．これより $a_n < \frac{3}{2}$ である．

【単調増加であること】$a_{n+1} > a_n$ を示すには $a_{n+1} - a_n$ を考えればよい．以下に必要な漸化式を記載しておく．

$$(1)\ a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n + 1} - \sqrt{a_{n-1} + 1} = \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{a_n + 1} + \sqrt{a_{n-1} + 1}}$$

$$(2)\ a_{n+1} - a_n = \frac{3a_n + 4}{2a_n + 3} - \frac{3a_{n-1} + 4}{2a_{n-1} + 3} = \frac{a_n - a_{n-1}}{(2a_n + 3)(2a_{n-1} + 3)}$$

である．この漸化式の分母はいずれも正の数なので，$a_{n+1} - a_n$ と $a_n - a_{n-1}$ の正負は一致する．

極限値については漸化式から直ちに求められる．$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$ であれば，

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n + 1} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n + 1}$$

なので，$\lim a_n = \alpha$ とおくと，

$$\alpha = \sqrt{\alpha + 1}.$$

この式を満たす正の数が求める極限値である．

(2) も同様.

(1) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　　(2) $\sqrt{2}$

【問題 2 の解答はテキスト p.184 を参照】