2026年度

# $C_a$ 数　学　問　題

## 注　意

1．試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2．解答用紙はすべて**黒鉛筆または黒芯のシャープペンシル**で記入することになっています。黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
（万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。）
3．この問題冊子は**12ページ**までとなっています。試験開始後，ただちにページ数を確認してください。なお，問題番号はⅠ～Ⅳとなっています。
4．解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5．解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し，その他の部分には何も書いてはいけません。
6．解答用紙を破ったり，傷つけたりしないように注意してください。
7．計算には，この問題冊子の余白部分を使ってください。
8．この問題冊子は持ち帰ってください。

Ⅰ. 下記の空欄ア～クにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ。

（i） $i$ を虚数単位とする。$0 < \beta < \alpha < \pi$ を満たす実数 $\alpha$，$\beta$ に対し，2つの複素数を $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$，$w = \cos\beta + i\sin\beta$ とする。$z - w$ の絶対値が $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ であるとき，$\alpha - \beta =$ [ ア ] である。

（ii） 1個のさいころを2回投げ，1回目に出た目の数を $a$，2回目に出た目の数を $b$ とする。このとき，2次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ が重解をもつ確率は [ イ ] であり，また，異なる2つの整数を解にもつ確率は [ ウ ] である。

（iii） Oを原点とする座標空間において，2点A（3，2，1），B（0，－1，4）を通る直線に，Oから垂線OHを下ろす。このとき，点Hの座標は [ エ ] である。

（iv） 1個のさいころを100回投げるとき，1の目が出る回数を $X$ とする。試行回数100を十分に大きいと考えると，$X$ は近似的に平均 [ オ ]，標準偏差 [ カ ] の正規分布に従う。

（v） 座標平面において，点（$\sqrt{3}$，0）を中心とする半径 $r$ の円を $C$ とする。直線 $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ に関して $C$ と対称である円を $C'$ とする。$C$ と $C'$ が外接するとき，$r =$ [ キ ] であり，$C'$ の中心の座標は [ ク ] である。

Ⅱ. $p$ を正の実数とする。Oを原点とする座標平面上に曲線 $C_1$：$y=\dfrac{1}{x}$ と曲線 $C_2$：$y=-\dfrac{3}{x}$ がある。また，$C_1$ 上の点P$\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ における $C_1$ の接線を $\ell$ とおき，$\ell$ と $C_2$ の2つの共有点を$Q_1$，$Q_2$とする。ただし，$Q_1$の $x$ 座標は正とする。

点$Q_1$，$Q_2$における $C_2$ の接線をそれぞれ $m_1$，$m_2$ とおき，$m_1$ と $m_2$ の交点をRとする。また，$\overrightarrow{RQ_1}$と$\overrightarrow{RQ_2}$のなす角を $\theta$（$0°<\theta<180°$）とする。このとき，以下の問(ⅰ)～(ⅴ)に答えよ。解答欄には，(ⅰ)～(ⅲ)については答えのみを，(ⅳ)，(ⅴ)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(ⅰ) $Q_1$，$Q_2$の座標をそれぞれ $p$ を用いて表せ。

(ⅱ) $m_1$，$m_2$ の方程式をそれぞれ $p$ を用いて表せ。

(ⅲ) Rの座標を $p$ を用いて表せ。

(ⅳ) $t=p^2+\dfrac{1}{p^2}$ とおく。内積 $\overrightarrow{RQ_1}\cdot\overrightarrow{RQ_2}$ を $t$ を用いて表せ。

(ⅴ) $p$ がすべての正の実数を動くとき，$\cos\theta$ の最小値とそのときの $p$ の値をそれぞれ求めよ。

Ⅲ． $n$ と $k$ を自然数とする。実数 $x$ に対し，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$$

により定める。$f_n(x)$ の最大値を $M_n$ とし，最大値をとる $x$ の値を $x_n$ とする。また，

$$S_{k,n} = \int_0^{x_n} f_k(x)\,dx$$

とする。このとき，以下の問(ｉ)～(ｖ)に答えよ。解答欄には，(ｉ)，(ⅱ)，(ⅳ)については答えのみを，(ⅲ)，(ｖ)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(ｉ)　$x_n$，$M_n$ をそれぞれ $n$ を用いて表せ。

(ⅱ)　$S_{1,1}$ の値を求めよ。

(ⅲ)　$S_{k,n}$ を $n$，$k$ を用いて表せ。

(ⅳ)　$\dfrac{1}{M_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_{k,n} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\dfrac{k}{n}\right)$ となるような関数 $g(x)$ を求めよ。ただし，$g(x)$ は $n$ に無関係な連続関数とする。

(ｖ)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{M_n}\sum_{k=1}^{n} S_{k,n}$ の値を求めよ。

Ⅳ. $i$ を虚数単位とし，複素数 $\alpha$ を

$$\alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}\,i}{4}$$

とする。また，自然数 $n$ に対し，複素数 $z_n$ を次のように定める。

$$z_1 = 4i, \quad z_{n+1} = \alpha z_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

さらに，$z_n$ の虚部を $a_n$ とする。このとき，次の問(ⅰ)～(ⅴ)に答えよ。解答欄には，(ⅰ)，(ⅱ)については答えのみを，(ⅲ)～(ⅴ)については答えだけでなく途中経過も書くこと。ただし，複素数 $z$ の偏角 $\theta = \arg z$ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(ⅰ) $\alpha$ の絶対値と偏角をそれぞれ求めよ。

(ⅱ) $z_2$，$z_3$，$z_4$ の絶対値と偏角をそれぞれを求めよ。

(ⅲ) 自然数 $n$ に対して，$a_{n+3}$ を $a_n$ を用いて表せ。

(ⅳ) 自然数 $n$ に対し

$$S_n = \sum_{k=1}^{3n} a_k$$

とおく。このとき，極限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ の値を求めよ。

(ⅴ) 複素数平面上の3点A$(-i)$，B$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$，C$\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)$ を頂点とする正三角形およびその内部を $D$ とする。このとき，$z_n$ が表す複素数平面上の点$\mathrm{P}_n$が $D$ に含まれるような最小の自然数 $n$ を求めよ。

【以下余白】