京都大学数理解析研究所講究録 **1473**
『ソリトン理論から可積分数理へ：“de nouvelles perspectives”』
2006 年 2 月, pp. 102–119

ソリトン系から見たパンルヴェ VI と その q 類似

菊地哲也 (Tetsuya Kikuchi, 東北大・理)
筧三郎 (Sabro Kakei, 立教大・理)

1 はじめに

一般化 Drinfel'd-Sokolov 階層により与えられるソリトン方程式系の相似簡約という視点による Painlevé 方程式の研究が現在進行中である [KK1], [KK2], [KK3], [KIK]. 研究の背景やこれまでに得られた方程式については [講究], [学会] を参照していただいて, 本稿ではこのうち, 論文 [KK3] において与えた three-wave equation と Painlevé VI 型方程式の対応の紹介と, その q 差分アナログについて述べる.

ここでは微分, q 差分ともに Drinfel'd-Sokolov 階層の意味では $\hat{\mathfrak{gl}}_3$ の homogeneous 階層, 戸田階層の意味では 3 成分階層の $(1,1,1)$ 簡約として得られるソリトン方程式から出発し, 以下の段階を経て (q-)Painlevé VI 方程式を与える線形問題に至る.

- 3 成分戸田階層の佐藤-Wilson 作用素 $W(z;\boldsymbol{t})$, $\bar{W}(z;\boldsymbol{t})$

  ↓ i) 相似簡約 (パラメータ $\alpha_i, \beta_i, (i=1,2,3)$ あり)

- 3×3 行列係数のモノドロミー保存変形方程式.

  ↓ ii) Laplace 変換

- (q-)Painlevé VI を与えるモノドロミー保存変形方程式
  (2×2 行列係数の Schlesinger 方程式).

微分の場合, 上記 ii) の Laplace 変換は Harnad [H] や Mazzocco [M1] により先行する研究があり, 3×3 の線形問題に基づく Painlevé VI の解析は, Dubrovin-Mazzocco [DM] (1 パラメータの場合) や Boalch [Bo1], [Bo2] などがある. 本研究ではこの背後にあるソリトン方程式の対称性に注目し, [KK2] による一般化された相似簡約の議論を応用し, それまで知られていなかったパラメータ一般の Painlevé VI をソリトン方程式の相似簡約として捉えることに成功した. 上記 i) の部分である. さらにこの方法は q 差分ソリトン方程式に対しても適用でき, その結果, 神保・坂井による q 差分 Painlevé VI を与える線形問題 [JS] が得られる.

以下, 上記の流れに沿って第 2 節では微分の場合, 第 3 節では q 差分の場合を紹介する.

2 Three-wave 方程式と Painlevé VI

2.1 佐藤-Wilson 方程式と three-wave 方程式

本稿では Painlevé VI 型方程式に関連することのみを述べるため, ソリトン方程式については Gauss 分解に基づく一般的な議論は行わずに佐藤-Wilson 方程式から話をはじめる. また, 論文 [KK3] では, 無限変数, n 成分で議論を行っているがここでは 3 変数, 3 成分に限定する.

時間変数を $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3)$ で与え, 佐藤-Wilson 作用素を

$$W(z; \boldsymbol{t}) := I + W_1 z^{-1} + W_2 z^{-2} + \cdots$$
$$\bar{W}(z; \boldsymbol{t}) := \bar{W}_0 + \bar{W}_1 z + \bar{W}_2 z^2 + \cdots$$

で定義する. ここで係数 $W_i = W_i(\boldsymbol{t})$ $(i \geq 1)$, $\bar{W}_i = \bar{W}_i(\boldsymbol{t})$ $(i \geq 0)$ は 3×3 行列であり, 特に W_1, $\bar{W}_0$ の行列成分を用いて方程式を記述するので,

$$W_1 = (w_{ij}), \qquad \bar{W}_0 = (\bar{w}_{ij})$$

と置く. W, $\bar{W}$ の時間発展を, 次の 佐藤-Wilson 方程式で与える:

$$\frac{\partial W}{\partial t_a} = B_a W - W \Lambda_a, \tag{2.1}$$
$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t_a} = B_a \bar{W} - \bar{W} \Lambda_a \qquad (a = 1, 2, 3). \tag{2.2}$$

ここで

$$\Lambda_a = z E_{aa}, \qquad B_a = B_a(z; t) := \left(W \Lambda_a W^{-1} \right)_{\geq 0} \tag{2.3}$$

と定義する. E_{aa} は aa 成分のみ 1 の行列単位で, B_a の定義にある右下の ≥ 0 は z に関して正べきを取るという意味である. 具体的に成分で表すと

$$B_1 = \begin{pmatrix} z & -w_{12} & -w_{13} \\ w_{21} & 0 & 0 \\ w_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & w_{12} & 0 \\ -w_{21} & z & -w_{23} \\ 0 & w_{32} & 0 \end{pmatrix},$$
$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & w_{13} \\ 0 & 0 & w_{23} \\ -w_{31} & -w_{32} & z \end{pmatrix}$$

となる. なお, ここで与えた佐藤-Wilson 方程式は論文 [KK3] とは若干異なり, いわゆる「ひねられた佐藤-Wilson 作用素」([Ta1] による) が満たす方程式であるが, 後の議論に影響はない. 佐藤-Wilson 方程式 (2.2) において, 両辺の z の次数が 0 の項を比較すれば W_1 と $\bar{W}_0$ の関係がわかる. すなわち

$$\frac{\partial \bar{W}_0}{\partial t_a} = B_{a,0} \bar{W}_0 \qquad (a = 1, 2, 3) \tag{2.4}$$

ここで $B_{a,0}$ は B_a において $z = 0$ としたものである. 方程式を成分で書くと,

$$\frac{\partial \bar{w}_{bc}}{\partial t_a} = w_{ba} \bar{w}_{ac} \quad (a \neq b), \qquad \frac{\partial \bar{w}_{ac}}{\partial t_a} = -\sum_{b \neq a} w_{ab} \bar{w}_{bc} \tag{2.5}$$

となる．ここで, パラメータ $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{C}^3$ に依存した形式的 Baker-Akhiezer 関数を

$$\Psi^{(\infty)}(z;\boldsymbol{t},\alpha)=W(z;\boldsymbol{t})\left(\sum_{a=1}^{3}\exp(zt_a)E_{aa}\right)z^{D(\alpha)},$$
$$\Psi^{(0)}(z;\boldsymbol{t},\alpha)=\bar{W}(z;\boldsymbol{t})\left(\sum_{a=1}^{3}\exp(zt_a)E_{aa}\right)z^{D(\alpha)}$$

により定義する．これらは佐藤-Wilson 方程式により次をみたすことがわかる:

$$\sum_{a=1}^{3}\frac{\partial\Psi}{\partial t_a}=z\Psi,\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial t_a}=B_a\Psi\qquad (a=1,2,3). \tag{2.6}$$

この方程式系の両立条件

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_a}-B_a,\ \frac{\partial}{\partial t_b}-B_b\right]=0\qquad(1\le a,b\le 3) \tag{2.7}$$

が 3 成分 KP の $(1,1,1)$-reduction の Lax 表示であり, 具体的には

$$\frac{\partial w_{ij}}{\partial t_a}=w_{ia}w_{aj}\qquad(i\neq j\neq a) \tag{2.8}$$

なる 6 組の方程式と reduction の条件

$$\partial w_{ij}=0,\qquad \partial=\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\partial}{\partial t_2}+\frac{\partial}{\partial t_3}, \tag{2.9}$$

に帰着される．ここではこの方程式の組を three-wave 方程式と呼ぶ．実際の three-wave 方程式との変数変換による対応は, たとえば [KvdL] にある．

以下の議論において, $\bar{W}_0^{-1}\Psi^{(0)}$ の満たす線形方程式が Painlevé VI に付随する線形問題と対応するので, ここで $\bar{B}_a$ を

$$\frac{\partial}{\partial t_a}-\bar{B}_a:=\bar{W}_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t_a}-B_a\right)\bar{W}_0$$

により定義する．$\bar{W}_0$ の満たす方程式 (2.4) より $\bar{B}_a$ は

$$\bar{B}_a=\bar{W}_0^{-1}B_a\bar{W}_0-\bar{W}_0^{-1}\frac{\partial\bar{W}_0}{\partial t_a}=\bar{W}_0^{-1}\Lambda_a\bar{W}_0$$

と表せる．今後 $\bar{W}_0^{-1}$ という行列は何度も現れるので, その ij 成分を ω_{ij} と書くことにする．すなわち

$$\omega_{ij}=\frac{\Delta_{ji}(\bar{W}_0)}{\det\bar{W}_0}, \tag{2.10}$$

ここで $\Delta_{ji}(\bar{W}_0)$ は $\bar{W}_0$ の ji 余因子である．また, 佐藤-Wilson 方程式により $\det\bar{W}_0$ は変数 t_a によらない定数であることも示せる．そこで, $\bar{W}_0^{-1}\Psi^{(0)}$ の満たす線形方程式の両立条件

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_a}-\bar{B}_a,\ \frac{\partial}{\partial t_b}-\bar{B}_b\right]=0\qquad(1\le a,b\le 3) \tag{2.11}$$

により, $\bar{w}_{ij}$ のみで閉じた方程式を書くことができるが, 定義よりすぐに $[\bar{B}_a, \bar{B}_b] = 0$ がわかるので, 単に

$$\frac{\partial \bar{B}_b}{\partial t_a} = \frac{\partial \bar{B}_a}{\partial t_b}. \tag{2.12}$$

となる. この関係式はもちろん (2.5) から示せる.

2.2 Three-wave 方程式の相似簡約

$\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ をパラメータとして, 対角行列 $D(\alpha), D(\beta)$ を

$$D(\alpha) := \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \qquad D(\beta) := \mathrm{diag}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

で与える. $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ により次の変形を行う

$$W_\lambda(z; \boldsymbol{t}) := \lambda^{D(\alpha)} W(\lambda^{-1} z; \lambda \boldsymbol{t}) \lambda^{-D(\alpha)}, \tag{2.13}$$

$$\bar{W}_\lambda(z; \boldsymbol{t}) := \lambda^{D(\alpha)} \bar{W}(\lambda^{-1} z; \lambda \boldsymbol{t}) \lambda^{-D(\beta)}, \tag{2.14}$$

ここで $\lambda \boldsymbol{t} := (\lambda t_1, \lambda t_2, \lambda t_3)$ と置いた. 特に W_1, $\bar{W}_0$ の成分は,

$$w_{ij}(\boldsymbol{t}) \mapsto \lambda^{\alpha_i - \alpha_j + 1} w_{ij}(\lambda \boldsymbol{t}), \qquad \bar{w}_{ij}(\boldsymbol{t}) \mapsto \lambda^{\alpha_i - \beta_j} \bar{w}_{ij}(\lambda \boldsymbol{t}),$$

という変形を受けることになる.

命題 1. *$W(z; \boldsymbol{t})$, $\bar{W}(z; \boldsymbol{t})$ が佐藤-Wilson 方程式 (2.1), (2.2) を満たすとき, $W_\lambda(z; \boldsymbol{t})$, $\bar{W}_\lambda(z; \boldsymbol{t})$ も (2.1), (2.2) を満たす.*

命題は直接代入して計算すれば示せる. このように一般化された Drinfeld-Sokolov 階層の相似条件に, 時間発展と可換になるようなパラメータがどれくらい入り得るかを調べ, それにより Painlevé 方程式のパラメータが現れる理由付けを与えたことが今回の一連の研究の主要結果の一つである ([学会] 参照). これにより, 従来知られていなかったパラメータ一般での Painlevé VI をソリトン方程式の reduction として与えることに成功した. なお, より制限された条件から 1 パラメータの Painlevé VI を導くという議論は [AvdL], [Du] にある.

そこで次の相似条件を置く:

$$W_\lambda(z; \boldsymbol{t}) = W(z; \boldsymbol{t}), \qquad \bar{W}_\lambda(z; \boldsymbol{t}) = \bar{W}(z; \boldsymbol{t}) \tag{2.15}$$

命題 2. *相似条件 (2.15) のもとで, Baker-Akhiezer 関数 $\Psi^{(\infty)}(z; \boldsymbol{t}, \alpha)$, $\Psi^{(0)}(z; \boldsymbol{t}, \beta)$ は線形方程式*

$$z \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \Big(D(\alpha) + \sum_{a=1}^{3} t_a B_a \Big) \Psi, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial t_a} = B_a \Psi \quad (a = 1, 2, 3) \tag{2.16}$$

を満たす.

証明は dressing method による一般的な方法がある [KK2], [KK3]. または直接相似条件 (2.15) を λ で微分して $\lambda=1$ とおけば示せる. 直接計算という方法を考えて見ると, 相似条件 (2.15) は, W_1, $\bar{W}_0$ の成分に対してさらに条件

$$\sum_{a=1}^{3} t_a \frac{\partial w_{ij}}{\partial t_a} = (\alpha_j - \alpha_i - 1) w_{ij}, \qquad \sum_{a=1}^{3} t_a \frac{\partial \bar{w}_{ij}}{\partial t_a} = (\beta_j - \alpha_i) \bar{w}_{ij}, \tag{2.17}$$

を課したことになるので, 理屈としては, 方程式 (2.8) に, 条件 (2.9), (2.17) を課せば Painlevé VI が得られることになる. 実際 [FY], [Kit] などではこの方針で Painlevé VI を導いているように見える (ただしここでの α_i にあたるパラメータは入っていない) が, 我々の以下の議論では w_{ij} は表には出さずに $\bar{w}_{ij}$ により Painlevé VI を記述することになる ((2.27) 参照).

命題 2 の z についての線形方程式の係数行列を整理して

$$z \frac{\partial \Psi}{\partial z} = (zT + V)\Psi$$

とおく. ここで $T := \mathrm{diag}(t_1, t_2, t_3)$ であり, V は

$$V := D(\alpha) + \sum_{a=1}^{3} t_a B_{a,0} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & (t_2 - t_1) w_{12} & (t_3 - t_1) w_{13} \\ (t_1 - t_2) w_{21} & \alpha_2 & (t_3 - t_2) w_{23} \\ (t_1 - t_3) w_{31} & (t_2 - t_3) w_{32} & \alpha_3 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

である. よって方程式系 (2.16) は $z=0$ に確定特異点 $z=\infty$ に rank 1 の不確定特異点をもつような方程式のパラメータ $\boldsymbol{t}$ によるモノドロミー保存変形方程式であることがわかる. さらにパラメータ α, β はそれぞれ $z=\infty, 0$ におけるモノドロミー指数となっている. このように考えると, Baker-Akhiezer 関数 $\Psi^{(0)}$ は $z=0$ における形式解, $\Psi^{(\infty)}$ は $z=\infty$ における形式解とみなせる. ここで, $z=0$ において正規化された関数の満たす方程式を系としてのべておく.

系 1. $\Psi = \bar{W}_0^{-1}\Psi^{(\infty)}$, $\bar{W}_0^{-1}\Psi^{(0)}$ は次の線形方程式系をみたす.

$$z \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \left(z \bar{W}_0^{-1} T \bar{W}_0 + D(\beta) \right) \Psi, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial t_a} = \bar{B}_a \Psi, \quad (a = 1, 2, 3) \tag{2.19}$$

この方程式が Painlevé VI に付随する線形問題 (Schlesinger 系) に対応する. 系を示すには (2.18) で与えた V と $\bar{W}_0$ の関係を調べればよい. $\bar{W}$ の満たす相似条件 (2.15) を λ で微分して $\lambda=1$ とおくと

$$z \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = D(\alpha)\bar{W} - \bar{W} D(\beta) + \sum_{a=1}^{3} t_a \frac{\partial \bar{W}}{\partial t_a}$$

となるので, 特に両辺の次数 0 の部分を拾うと,

$$\bar{W}_0^{-1} V \bar{W}_0 = D(\beta). \tag{2.20}$$

となる. これより系が示せる.

2.3 Laplace 変換

方程式 (2.19) を Schlesinger 系に変換するため, 形式的な Laplace 変換を行う.

$$\Psi(z) \mapsto \Phi(\zeta) = L[\Psi(z)](\zeta) := \int_\gamma e^{-z\zeta}\Psi(z)dz. \tag{2.21}$$

これは線形方程式の次のような作用素の変換をとみなせる.

$\Psi(z)$ への作用	$\leftrightarrow$	$\Phi(\zeta)$ への作用
$(-z)^k$倍	$\leftrightarrow$	∂_ζ^k
∂_z^k	$\leftrightarrow$	ζ^k倍

この規則にのっとって, 系 1 の線形方程式 (2.19) を書き換えると次の命題が得られる:

命題 3. 関数 $\Phi(\zeta;\boldsymbol{t}) = L[\bar{W}_0^{-1}\Psi^{(0)}], L[\bar{W}_0^{-1}\Psi^{(\infty)}]$ は線形方程式系

$$\frac{\partial\Phi(\zeta;\boldsymbol{t})}{\partial\zeta} = \sum_{a=1}^{3}\frac{A_a(t)}{\zeta - t_a}\Phi(\zeta;\boldsymbol{t}), \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial\Phi(\zeta;t)}{\partial t_a} = -\frac{A_a(t)}{\zeta - t_a}\Phi(\zeta;t) \quad (a = 1,2,3), \tag{2.23}$$

を満たす. ここで

$$A_a(t) := -\bar{W}_0^{-1}E_{aa}\bar{W}_0(D(\beta)+I) = -\bar{W}_0^{-1}E_{aa}(V+I)\bar{W}_0. \tag{2.24}$$

とおいた.

実際, Laplace 変換を実行してみると

$$(xI + \bar{W}_0^{-1}T\bar{W}_0)\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial\zeta} = -(D(\beta)+I)\Phi(\zeta),$$

すなわち

$$\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial\zeta} = -\bar{W}_0^{-1}(\zeta I + T)^{-1}\bar{W}_0(D(\beta)+I)\Phi(x)$$

となることから命題 3 は示せる. この結果 4 個の確定特異点 t_1, t_2, t_3, ∞ を持つ 3×3 Schlesinger 系が得られた.

2.4 Painlevé VI への reduction

Painlevé VI を与える Schlesinger 方程式は 2×2 行列で表示されるため, はじめの相似条件 (2.15) を $\beta_3 + 1$ だけ平行移動しておいて

$$W(z;t) = \lambda^{D(\alpha)-(\beta_3+1)I}W(\lambda^{-1}z;\lambda t)\lambda^{-D(\alpha)-(\beta_3+1)I},$$
$$\bar{W}(z;t) = \lambda^{D(\alpha)-(\beta_3+1)I}\bar{W}(\lambda^{-1}z;\lambda t)\lambda^{-D(\beta)+(\beta_3+1)I}$$

とする. 単にパラメータを平行移動しただけなので, 線形方程式の係数行列 V の ij 成分を, (2.20) を経由して $\bar{W}_0$ のみで表すと

$$
\begin{aligned}
V_{ij} &= \begin{pmatrix} \bar{w}_{i1}(\beta_1-\beta_3-1) & \bar{w}_{i2}(\beta_2-\beta_3-1) & -\bar{w}_{i3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{1j} \\ \omega_{2j} \\ \omega_{3j} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \bar{w}_{i1}(\beta_1-\beta_3) & \bar{w}_{i2}(\beta_2-\beta_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{1j} \\ \omega_{2j} \end{pmatrix} - \sum_{a=1}^{3} \bar{w}_{ia}\omega_{aj}
\end{aligned} \tag{2.25}
$$

と表せる. ここで ω_{ij} は $\bar{W}_0^{-1}$ の ij 成分であった. さらに Laplace 変換を行った後の係数行列は

$$
\begin{aligned}
A_a &= -\bar{W}_0^{-1} E_{aa} \bar{W}_0 (D(\beta) - \beta_3 I) \\
&= -\begin{pmatrix} \omega_{1a} \\ \omega_{2a} \\ \omega_{3a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_{a1}(\beta_1-\beta_3) & \bar{w}_{a2}(\beta_2-\beta_3) & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる. こうしてランク 2 の問題に帰着した. さらに左上の 2 行 2 列だけ取り出して

$$
\tilde{A}_a = -\begin{pmatrix} \omega_{1a} \\ \omega_{2a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_{a1}(\beta_1-\beta_3) & \bar{w}_{a2}(\beta_2-\beta_3) \end{pmatrix} \tag{2.26}
$$

とおく. あとは $\tilde{A}$ により得られる線形方程式を

$$
\xi := \frac{t_1-\zeta}{t_1-t_2}, \qquad t := \frac{t_1-t_3}{t_1-t_2}.
$$

なる変換で書き直すと,

$$
\frac{\partial Y}{\partial \xi} = \left(\frac{\tilde{A}_1}{\xi} + \frac{\tilde{A}_2}{\xi-1} + \frac{\tilde{A}_3}{\xi-t} \right) Y, \qquad \frac{\partial Y}{\partial t} = -\frac{\tilde{A}_3}{\xi-t} Y
$$

が得られる. ここからは [JM], [Ok1] に従い (いつもの処方箋)

$$
y = \frac{(t_3-t_1)\omega_{1a}\bar{w}_{a2}(\beta_2-\beta_3)}{(t_1-t_2)\omega_{1a}\bar{w}_{a2}(\beta_2-\beta_3) + (t_1-t_3)\omega_{1a}\bar{w}_{a2}(\beta_2-\beta_3)} \tag{2.27}
$$

とおけば Painlevé VI

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dt^2} =& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-t}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{y-t}\right)\frac{dy}{dt} \\
&+ \frac{y(y-1)(y-t)}{2t^2(t-1)^2}\left\{(\theta_4-1)^2 - \theta_1^2\frac{t}{y^2} + \theta_3^2\frac{t-1}{(y-1)^2} + (1-\theta_2^2)\frac{t(t-1)}{(y-t)^2}\right\}
\end{aligned}
$$

が得られる. 相似条件で導入したパラメータ α_i, β_j との対応は,

$$
\theta_1 = \alpha_1 - \beta_3, \quad \theta_2 = \alpha_3 - \beta_3, \quad \theta_3 = \alpha_2 - \beta_3, \quad \theta_4 = \beta_1 - \beta_2,
$$

である.

なお, この方程式系に対する $A_2^{(1)}$ 型 affine Weyl 群の対称性を, 我々の佐藤-Wilson 方程式に基づく方法 [KK2] により構成することができる [KK3]. これと Boalch [Bo2] により考察されている 3×3 Lax 表示の対称性との関連を見れば $F_4^{(1)}$ 型 Weyl 群対称性 [Ok2] のどの作用が実現されているのかもわかるのだが, 本稿では省略する.

3　q 差分 n-wave equation の Lax 表示

さて, 以上の話の q 差分アナログをやってみようというのが次の目標である.

3.1　q 差分佐藤-Wilson 方程式

q 差分に関する時間発展の変数を $x = (x_1, x_2, x_3)$ とおき, 各々の変数に関する q-shft 演算子を T_1, T_3, T_3 とおく. すなわち

$$T_j x_k = q^{\delta_{jk}} x_k \qquad (j, k = 1, \dots, n)$$

である. さらに見やすくするために x の関数 f への T_j の作用を

$$f^{(j)}(x) := T_j f(x), \quad f^{(jk)}(x) := T_j T_k f(x), \dots$$

のように略記する. さて, q 差分の場合も佐藤-Wilson 作用素は次で定義される ([Ta2] 参照):

$$\begin{aligned} W &= W(z;x) := I + W_1(x) z^{-1} + W_2(x) z^{-2} + \cdots \\ \bar{W} &= \bar{W}(z;x) := \bar{W}_0(x) + \bar{W}_1(x) z + \bar{W}_2(x) z^2 + \cdots \end{aligned}$$

ここでも $W_j = W_j(x)$, $\bar{W}_j = \bar{W}_j(x)$ は 3×3 行列とする. 今度は変数 x についての時間発展を差分方程式

$$W^{(a)}(I - \epsilon x_a \Lambda_a) = (I - \epsilon x_a \mathcal{B}_a) W, \tag{3.1}$$

$$\bar{W}^{(a)}(I - \epsilon x_a \Lambda_a) = (I - \epsilon x_a \mathcal{B}_a) \bar{W} \tag{3.2}$$

で定義する. ここで $\epsilon = 1 - q$ であり, $\Lambda_a = z E_{aa}$ は微分のときと同様, また $\mathcal{B}_a(z;x)$ は次で定義される:

$$\mathcal{B}_a := \left(W^{(a)} \Lambda_a W^{-1} \right)_{\geq 0} = \Lambda_a + W_1^{(a)} E_{aa} - E_{aa} W_1. \tag{3.3}$$

q 差分作用素を用いてこれらの式を書き直すと,

$$\begin{aligned} \frac{I - T_a}{\epsilon x_a} W &= \mathcal{B}_a W - W^{(a)} \Lambda_a = -\left(W^{(a)} \Lambda_a W^{-1} \right)_{<0} W, \\ \frac{I - T_a}{\epsilon x_a} \bar{W} &= \mathcal{B}_a \bar{W} - \bar{W}^{(a)} \Lambda_a, \end{aligned}$$

となるので, これらが微分の場合の佐藤-Wilson 方程式 (2.1), (2.2) の自然な q 差分化であることがわかる.

Baker-Akhiezer 関数を定義するため q 指数関数を

$$\tilde{e}_q(z) := (\epsilon z q^{-1}; q^{-1})_\infty = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - \epsilon z q^{-i-1}) \tag{3.4}$$

で導入する．ここでは, $|q|>1$ として考えおり, この範囲で収束する関数を用いて定義した．これは後に q 差分 Painlevé VI に付随する線形問題に対応させるときに q^{-1}-shift の差分方程式を用いるために合わせただけであり本質的なことではない．q 指数関数は

$$\tilde{e}_q(qz)=(1-\epsilon z)\tilde{e}_q(z) \;\Leftrightarrow\; \frac{1-T_q}{\epsilon z}\tilde{e}_q(z)=\tilde{e}_q(z) \tag{3.5}$$

を満たす．この関数を用いて q 差分形式的 Baker-Akhiezer 関数を

$$\Psi^{(\infty)}(z;x,\alpha)=W(z;t)\left(\sum_{a=1}^{3}\tilde{e}_q(zx_a)E_{aa}\right)z^{D(\alpha)}, \tag{3.6}$$

$$\Psi^{(0)}(z;x,\alpha)=\bar{W}(z;t)\left(\sum_{a=1}^{3}\tilde{e}_q(zx_a)E_{aa}\right)z^{D(\alpha)} \tag{3.7}$$

で定義すると, q 差分佐藤-Wilson 方程式 (3.1), (3.2) と q 指数関数の満たす方程式 (3.5) より, q 差分形式的 Baker-Akhiezer 関数は次の差分方程式をみたすことがわかる:

$$\frac{I-T_a}{\epsilon x_a}\Psi=\mathcal{B}_a\Psi \quad\Leftrightarrow\quad T_a\Psi=(I-\epsilon x_a\mathcal{B}_a)\Psi. \tag{3.8}$$

以下では主に q 差分よりも q-shift で方程式を記述するので, (3.8) の右側の方程式の係数を z のべきで整理して

$$\begin{aligned} I-\epsilon x_a\mathcal{B}_a &= I-\epsilon x_a(\Lambda_a+W_1^{(a)}E_{aa}-E_{aa}W_1)\\ &=: -z\epsilon X_a+V_a, \end{aligned}$$

とおく．すなわち

$$X_a:=x_aE_{aa}, \qquad V_a:=I-\epsilon(W_1^{(a)}X_a-X_aW_1) \tag{3.9}$$

である．ここでも W_1 の成分を w_{ij}, $\bar{W}_0$ の成分を $\bar{w}_{ij}$ とおいて具体的に表示すると,

$$\begin{aligned} V_1 &= I-\epsilon x_1\begin{pmatrix} w_{11}^{(1)}-w_{11} & -w_{12} & -w_{13}\\ w_{21}^{(1)} & 0 & 0\\ w_{31}^{(1)} & 0 & 0 \end{pmatrix},\\ V_2 &= I-\epsilon x_2\begin{pmatrix} 0 & w_{12}^{(2)} & 0\\ -w_{21} & w_{22}^{(2)}-w_{22} & -w_{23}\\ 0 & w_{32}^{(2)} & 0 \end{pmatrix},\\ V_3 &= I-\epsilon x_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & w_{13}^{(3)}\\ 0 & 0 & w_{23}^{(3)}\\ -w_{31} & -w_{32} & w_{33}^{(3)}-w_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって佐藤-Wilson 方程式 (3.2) の 0 次の項を比較して

$$\frac{\bar{w}_{bc}-\bar{w}_{bc}^{(a)}}{\epsilon x_a}=w_{ba}^{(a)}\bar{w}_{ac} \quad (b\neq a), \qquad \frac{\bar{w}_{ac}-\bar{w}_{ac}^{(a)}}{\epsilon x_a}=w_{aa}^{(a)}\bar{w}_{aa}-\sum_{b=1}^{3}w_{ab}\bar{w}_{bc} \tag{3.10}$$

が得られる．すなわち (2.5) の q 差分化である．

また, q 差分の場合も $\Psi^{(0)}$ の top term を正規化した $\bar{W}_0^{-1}\Psi^{(0)}$ のみたす方程式

$$T_a\Psi = \left(I - \epsilon x_a(\bar{W}_0^{(a)})^{-1}\Lambda_a\bar{W}_0\right)\Psi \qquad (a=1,2,3) \tag{3.11}$$

が q 差分 Painlevé VI の線形問題に対応する．そこで, (3.11) の係数行列を $I-\epsilon z\bar{V}_a$ と略記する．すなわち

$$z\bar{V}_a := x_a(\bar{W}_0^{(a)})^{-1}\Lambda_a\bar{W}_0 = z(\bar{W}_0^{(a)})^{-1}X_a\bar{W}_0$$

とおく．

3.2 q 差分 three-wave 方程式

q 差分方程式 (3.8) の両立条件

$$T_aT_b\Psi = T_bT_a\Psi \qquad (a,b=1,2,3)$$

から得られる方程式

$$(-\epsilon zX_b + V_b^{(a)})(-\epsilon zX_a + V_a) = (-\epsilon zX_a + V_a^{(b)})(-\epsilon zX_b + V_b). \tag{3.12}$$

が 3 成分 q-KP の $(1,1,1)$-reduction であり, これを q 差分 three-wave equation と呼ぶことにする．(3.12) を z について展開すると z^2 の係数が 0 となることはすぐにわかるので, z^1, z^0 の係数を比較して

$$X_bV_a + V_b^{(a)}X_a = X_aV_b + V_a^{(b)}X_b \tag{3.13}$$
$$V_b^{(a)}V_a = V_a^{(b)}V_b \tag{3.14}$$

が得られる．なお, 梶原・野海・山田 [KNY] による q KP 方程式は, この議論における佐藤-Wilson 作用素を適当に置き換え, ここにある 2 組の方程式 (3.13), (3.14) に対応する方程式を V_a の成分で記述したものである ([学会] 参照)．ここではさらに定義式 (3.9) により W_1 の成分の満たす関係式として方程式を与える．すると (3.13) は trivial な関係式となり, (3.14) は直接成分を比較することにより,

$$w_{aa}^{(a)} - w_{aa} + w_{aa}^{(b)} - w_{aa}^{(ab)} + \epsilon x_b\left(w_{ab}^{(b)}w_{ba} - w_{ab}^{(ab)}w_{ba}^{(a)}\right) = 0 \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} &x_a(w_{ab}^{(b)} - w_{ab}) + x_b(w_{ab}^{(ab)} - w_{ab}^{(b)}) \\ &\quad + \epsilon x_ax_b\left(w_{ab}^{(b)}w_{bb} - w_{aa}^{(ab)}w_{ab}^{(b)} + \sum_{i=1}^{3}w_{ai}^{(b)}w_{ia}^{(b)}\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$w_{ac}^{(b)} - w_{ac} + \epsilon x_bw_{ab}^{(b)}w_{bc} = 0 \tag{3.17}$$

の 3 種類の方程式に帰着されることがわかる．これが q 差分 three-wave 方程式である．(3.17) を

$$\frac{w_{ac} - w_{ac}^{(b)}}{\epsilon x_b} = w_{ab}^{(b)}w_{bc}$$

と書き直せば, 微分のときの three-wave (2.8) の自然な q 差分化であることがわかる．

一方 (3.11) の両立条件より得られる関係式

$$(I - \epsilon z \bar{V}_b^{(a)})(I - \epsilon z \bar{V}_a) = (I - \epsilon z \bar{V}_a^{(b)})(I - \epsilon z \bar{V}_b) \tag{3.18}$$

と, これを z で展開して z^1, z^2 の係数として得られる方程式

$$x_a \bar{V}_a + x_b \bar{V}_b^{(a)} = x_b \bar{V}_b + x_a \bar{V}_a^{(b)}, \tag{3.19}$$

$$\bar{V}_b^{(a)} \bar{V}_a = \bar{V}_a^{(b)} \bar{V}_b \tag{3.20}$$

を $\bar{W}_0$ の成分で表すと, 今度は (3.20) は trivial な関係式になり, (3.19) からは

$$x_a \omega_{ia}^{(a)} \bar{w}_{aj} + x_b \omega_{ib}^{(ab)} \bar{w}_{bj}^{(a)} = x_b \omega_{ib}^{(b)} \bar{w}_{bj} + x_a \omega_{ia}^{(ab)} \bar{w}_{aj}^{(b)} \tag{3.21}$$

が得られる. ここで ω_{ij} は $\bar{W}_0^{-1}$ の ij 成分 (2.10) であったことを注意する. これも

$$\frac{1 - T_b}{\epsilon x_b} \omega_{ia}^{(a)} \bar{w}_{aj} = \frac{1 - T_a}{\epsilon x_a} \omega_{ib}^{(b)} \bar{w}_{bj}$$

と書き直せば (2.12) の q 差分化となっていることがわかる.

3.3 q 差分 scaling symmetry と相似簡約

微分のときの相似変形 (2.13), (2.14) と同様

$$W_\lambda(z; x) := \lambda^{D(\alpha)} W(\lambda^{-1} z; \lambda x) \lambda^{-D(\alpha)},$$
$$\bar{W}_\lambda(z; x) := \lambda^{D(\alpha)} \bar{W}(\lambda^{-1} z; \lambda x) \lambda^{-D(\beta)}$$

とする. ここでも $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ である. するとやはり次が成り立つ.

命題 4. $W(z; x)$ と $\bar{W}(z; x)$ が q 差分佐藤-*Wilson* 方程式 (3.1), (3.2) をみたすとき, $W_\lambda(z; x)$ と $\bar{W}_\lambda(z; x)$ も (3.1), (3.2) を満たす.

この命題も直接代入して計算すれば示せる. さらに微分のときと同じく

$$W_\lambda(z; x) = W(z; x), \qquad \bar{W}_\lambda(z; x) = \bar{W}(z; x) \tag{3.22}$$

という相似簡約条件をおく. この条件のもとで $\lambda = q$ とおくと, Baker-Akhiezer 関数は

$$\begin{aligned} \Psi(qz; x) &= q^{D(\alpha)} \Psi(z; qx) \\ &= q^{D(\alpha)} \big(-\epsilon z X_1 + V_1^{(2,3)}\big)\big(-\epsilon z X_2 + V_2^{(3)}\big)\big(-\epsilon z X_3 + V_3\big) \Psi(z; x) \end{aligned}$$

という差分方程式を満たすことがわかる. 一見, この表示だと係数行列は z の 3 次式に見えるが, 実際に展開すると z^3, z^2 の係数が 0 となることは, V_a を W_1 による表示に直すことによりわかり, z^1 の係数についても, 差分方程式 (3.17) を用いて整理すると係数行列が対角行列になっていることがわかる. その結果得られる差分方程式は

$$\Psi(qz; x) = q^{D(\alpha)} \left(-\epsilon z (X_1 + X_2 + X_3) + V_1^{(23)} V_2^{(3)} V_3\right) \Psi(z; x)$$

となる. これが Painlevé VI の 3×3 Lax 表示の q 差分版である. $X := X_1 + X_2 + X_3 = \mathrm{diag}(x_1, x_2, x_3)$ とおいてまとめると,

命題 5. 相似条件 (3.22) のもとで, q 差分 *Baker-Akhiezer* 関数 (3.6), (3.7) は

$$\Psi(qz;x) = q^{D(\alpha)}\left(-\epsilon zX + V_1^{(23)}V_2^{(3)}V_3\right)\Psi(z;x), \tag{3.23}$$

$$T_a\Psi(z;x) = (-z\epsilon X_a + V_a)\Psi(z;x) \qquad (a=1,2,3) \tag{3.24}$$

を満たす.

この係数行列の z に関して 0 次の項を $\bar{W}_0$ で表す. 相似条件 (3.22) で $\lambda = q$ とおき, 特に grade 0 の部分だけ見ると,

$$\bar{W}_0(x) = q^{D(\alpha)}\bar{W}_0(qx)q^{-D(\beta)} \tag{3.25}$$

一方, $\bar{W}_0$ は差分方程式 $T_a\bar{W}_0 = V_a\bar{W}_0$ をみたすので

$$\bar{W}_0(qx) = T_1T_2T_3\bar{W}_0(x) = V_1^{(23)}V_2^{(3)}V_3\bar{W}_0(x) \tag{3.26}$$

となる. (3.25), (3.26) を合わせると,

$$q^{D(\alpha)}V_1^{(2,3)}V_2^{(3)}V_3 = \bar{W}_0(x)q^{D(\beta)}\bar{W}_0(x)^{-1} \tag{3.27}$$

となる.

この場合もやはり $\bar{W}_0^{-1}\Psi^{(\infty)}$, $\bar{W}_0^{-1}\Psi^{(0)}$ の満たす方程式を後で用いるので, 系として述べておく.

系 2. $\Psi = \bar{W}_0^{-1}\Psi^{(\infty)}$, $\bar{W}_0^{-1}\Psi^{(0)}$ は次を満たす*:*

$$\begin{aligned}\Psi(qz;x) &= \bar{W}_0^{-1}q^{D(\alpha)}\left(-\epsilon zX + V_1^{(23)}V_2^{(3)}V_3\right)\bar{W}_0\Psi(z;x)\\ &= \left(q^{D(\beta)} - \epsilon z\bar{W}_0^{-1}q^{D(\alpha)}X\bar{W}_0\right)\Psi(z;x),\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$T_a\Psi(z;x) = \left(I - \epsilon z\bar{V}_a\right)\Psi(z;x), \qquad \bar{V}_a := (\bar{W}_0^{(a)})^{-1}X_a\bar{W}_0. \tag{3.29}$$

3.4 q 差分 Laplace 変換

微分の場合と同様に形式的な Laplace 変換を考える. $|q| > 1$ という条件で考えていることに注意すると, 定積分の q 類似である Jackson 積分は

$$\int_0^\infty f(t)d_qt = (1-q^{-1})\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(q^n)q^n \tag{3.30}$$

と定義される. q 差分形式的 Laplace 変換を, q 指数関数 $\tilde{e}_q(z)$ (3.4) を積分核とする Jackson 積分により定義する. すなわち

$$\Psi(z) = \int_0^\infty \Phi(\zeta)\tilde{e}_q(z\zeta)d_q\zeta = (1-q^{-1})\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Phi(q^n)\tilde{e}_q(zq^n)q^n$$

である. 積の積分に関する公式

$$\int_0^\infty \frac{f(t)-f(qt)}{\epsilon t}g(t)d_qt = \int_0^\infty f(t)\frac{g(t)-g(q^{-1}t)}{\epsilon t}d_qt \tag{3.31}$$

を用いると, q 差分作用素

$$D_{q,z} := \frac{1 - T_{q,z}}{\epsilon z}$$

と掛け算作用素 (z 倍) との間に次の関係があることがわかる.

$\Psi(z)$ への作用	$\leftrightarrow$	$\Phi(\zeta)$ への作用
z 倍	$\leftrightarrow$	$D_{q^{-1},\zeta}$
$D_{q,z}$	$\leftrightarrow$	ζ倍

または, q 差分 Laplace 変換を, このような q 差分作用素と掛け算作用素の形式的な変換とみなしてもよい. また, この 2 つの関係式より

$$\Psi(qz) \leftrightarrow q^{-1}\Phi(q^{-1}\zeta) \tag{3.32}$$

という対応があることもわかる. この規則にのっとって, 線形方程式 (3.28), (3.29) を書き換えると次の命題を得る.

命題 6. *q 差分 Baker-Akhiezer 関数 $\Psi = \bar{W}_0^{-1}\Psi^{(\infty)}$, $\bar{W}_0^{-1}\Psi^{(0)}$ の q Laplace 変換により得られる関数は次を満たす:*

$$\begin{aligned}\Phi(q^{-1}\zeta; x) &= \zeta\bar{W}_0^{-1}\left(\zeta I - q^{D(\alpha)+I}X\right)^{-1} q^{D(\alpha)+I} \\ &\qquad \times \left(-X\zeta^{-1} + V_1^{(2,3)}V_2^{(3)}V_3\right)\bar{W}_0\Phi(\zeta; x) && (3.33) \\ &= \left(I + \sum_{a=1}^{3} \frac{\zeta A_a(x)}{\zeta - q^{\alpha_a+1}x_a}\right)\Phi(\zeta; x), && (3.34) \\ T_a\Phi(\zeta; x) &= \left(I - x_a\frac{(\bar{W}_0^{(a)})^{-1}E_{aa}\bar{W}_0(I - q^{D(\beta)+I})}{\zeta - q^{\alpha_a+1}x_a}\right)\Phi(\zeta; x). && (3.35)\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}A_a(x) :&= -\bar{W}_0^{-1}E_{aa}\bar{W}_0\left(I - q^{D(\beta)+I}\right) && (3.36) \\ &= -\bar{W}_0^{-1}E_{aa}\left(I - q^{D(\alpha)+I}V_1^{(23)}V_2^{(3)}V_3\right)\bar{W}_0\end{aligned}$$

($a = 1, 2, 3$) である.

実際に (3.28) の V_a による表示に対し q 差分 Laplace 変換を行うと,

$$\begin{aligned}&\bar{W}_0^{-1}\left(I - q^{D(\alpha)+I}X\zeta^{-1}\right)\bar{W}_0\Phi(q^{-1}\zeta; x) \\ &\quad = \bar{W}_0^{-1}q^{D(\alpha)+I}\left(-X\zeta^{-1} + V_1^{(23)}V_2^{(3)}V_3\right)\bar{W}_0\Phi(\zeta; x)\end{aligned}$$

となるので, (3.33) を得る. 一方, (3.28) の $\bar{W}_0$ 表示に q 差分 Laplace 変換を行うと,

$$\begin{aligned}&\left(\zeta I - \bar{W}_0^{-1}q^{D(\alpha)+I}X\bar{W}_0\right)\Phi(q^{-1}\zeta; x) \\ &\quad = \left(\zeta q^{D(\beta)+I} - \bar{W}_0^{-1}q^{D(\alpha)+I}X\bar{W}_0\right)\Phi(\zeta; x) && (3.37) \\ &\quad = \left(\zeta(q^{D(\beta)+I} - I) + \bar{W}_0^{-1}(\zeta I - q^{D(\alpha)+I}X)\bar{W}_0\right)\Phi(\zeta; x)\end{aligned}$$

となるので

$$(\zeta I - q^{D(\alpha)+I})^{-1} = \sum_{a=1}^{3} \frac{E_{aa}}{\zeta - q^{\alpha_a+1}}$$

に注意して書き直せば (3.34) が得られる．また, (3.35) は (3.29) を q-Laplace 変換により書き換えて (3.34) を代入すればよい.

3.5 q 差分 Painlevé VI との対応

q 差分 Painlevé VI は独立変数 t, 従属変数 f, g に対し次で与えられる [JS]:

$$T(g) = \frac{(f-ta_1)(f-ta_2)b_3b_4}{g(f-a_3)(f-a_4)}, \qquad T^{-1}(f) = \frac{(g-tb_1)(g-tb_2)a_3a_4}{f(g-b_3)(g-b_4)} \tag{3.38}$$

ここで T は変数 t を q 倍する作用素で, a_i, b_i $(i=1,2,3,4)$ はパラメータである．この方程式は, 2×2 行列係数の q 差分方程式

$$Y(q\zeta, t) = \mathcal{A}(\zeta, t)Y(x, t), \qquad \mathcal{A}(\zeta, t) = \mathcal{A}_0(t) + \mathcal{A}_1(t)\zeta + \mathcal{A}_2(t)\zeta^2 \tag{3.39}$$

で，係数行列が条件

$$\mathcal{A}_2(t) = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_0(t) \text{ の固有値は } t\theta_1,\ t\theta_2, \qquad \frac{\theta_1}{\theta_2}, \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \notin \{q^{\pm 1}, q^{\pm 2}, \dots\}$$

を満たすものの, $\zeta = 0, \infty$ における解の接続行列を不変に保つような, パラメータ t による変形条件として与えられる．具体的には, 係数行列 $\mathcal{A}(\zeta, t)$ の行列式が

$$\det \mathcal{A}(\zeta, t) = \kappa_1\kappa_2(x-ta_1)(x-ta_2)(x-a_3)(x-a_4)$$

となるとき, t に関する差分方程式

$$Y(\zeta, qt) = B(\zeta, t)Y(\zeta, t), \qquad B(\zeta, t) = \frac{\zeta(\zeta I + B_0(t))}{(\zeta - qta_1)(\zeta - qta_2)} \tag{3.40}$$

との両立条件として与えられる方程式である．(3.38) の従属変数 f, g は

$$f = -\frac{\mathcal{A}_0^{12}}{\mathcal{A}_1^{12}}, \qquad g = \frac{(\mathcal{A}_0^{12} + ta_1\mathcal{A}_1^{12})(\mathcal{A}_0^{12} + ta_2\mathcal{A}_1^{12})}{q\,(\mathcal{A}_0^{11}(\mathcal{A}_1^{12})^2 - \mathcal{A}_1^{11}\mathcal{A}_0^{12}\mathcal{A}_1^{12} + \kappa_1(\mathcal{A}_0^{12})^2)} \tag{3.41}$$

で, パラメータ b_j は

$$b_1 = \frac{a_1a_2}{\theta_1}, \qquad b_2 = \frac{a_1a_2}{\theta_2}, \qquad b_3 = \frac{1}{q\kappa_1}, \qquad b_4 = \frac{1}{\kappa_2}$$

で与えられる．ここで $\mathcal{A}_i^{jk}$ は行列 $\mathcal{A}_i(t)$ の jk 成分を表す.

本稿での主結果は, q-three wave 方程式の Lax 表示の Laplace 変換により得られた q 差分方程式系 (3.34), (3.35) から q Painlevé VI に付随する線形問題が得られるということである.

定理 1. 条件 $x_3=0$ とおき, $x_1=\gamma t$ (γは定数), x_2 を定数とみなしたとき, q 差分方程式系 (3.34), (3.35) は, *q Painlevé VI* を与える方程式系 (3.39), (3.40) と同値である. パラメータの対応は

$$\kappa_1=q^{\beta_1+1},\quad \kappa_2=q^{\beta_2+1},\quad \theta_1=\gamma x_2 q^{\alpha_1+\alpha_2+2},\quad \theta_2=\gamma x_2 q^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+3},$$
$$a_1=\gamma,\qquad a_2=\gamma q^{\alpha_1+1},\qquad a_3=x_2,\qquad a_4=x_2 q^{\alpha_2+1}.$$

となる.

3.5.1 証明の概略

$x_3=0$ とおくと (3.9) より $V_3=I$ となる. よって命題 6 の ζ に関する方程式は

$$\begin{aligned}\Phi(q^{-1}\zeta;x)&=\left(I+\zeta\left(\frac{A_1(x)}{\zeta-q^{1+\alpha_1}x_1}+\frac{A_2(x)}{\zeta-q^{1+\alpha_2}x_2}+\frac{A_3(x)}{\zeta}\right)\right)\Phi(\zeta;x)\\&=\bar{W}_0^{-1}\mathrm{diag}\left((\zeta-q^{\alpha_1+1}x_1)^{-1},(\zeta-q^{\alpha_2+1}x_2)^{-1},\zeta^{-1}\right)\\&\qquad\times q^{D(\alpha)+I}\zeta\left(-X_1\zeta^{-1}+V_1^{(23)}\right)\left(-X_2\zeta^{-1}+V_2^{(3)}\right)\bar{W}_0\Phi(\zeta;x)\end{aligned}$$

となり, x_1 についての方程式 (3.35) は

$$T_1\Phi(\zeta;x)=\left(I-x_1\frac{(\bar{W}_0^{(1)})^{-1}E_{11}\bar{W}_0(I-q^{D(\beta)+I})}{\zeta-q^{\alpha_1+1}x_1}\right)\Phi(\zeta;x)\tag{3.42}$$

となる. ここで, 得られた方程式系が ζ に関しては q^{-1}-shift なのだが x_1 に関しては q-shift となっているため, (3.42) については係数行列の逆行列を考えないといけないことを注意する. さて

$$\Phi(\zeta,x)=\frac{Y(\zeta,x)}{\prod_{i=0}^{\infty}(1-q^{\alpha_1-i}x_1\zeta^{-1})\prod_{i=0}^{\infty}(1-q^{\alpha_2-i}x_2\zeta^{-1})}$$

により $Y(\zeta,x)$ を導入すれば係数行列の分母を払うことができ, その結果得られる, ζ についての多項式となる係数行列を $\tilde{\mathcal{A}}(\zeta;x)=\tilde{\mathcal{A}}_2\zeta^2+\tilde{\mathcal{A}}_1\zeta+\tilde{\mathcal{A}}_0$ とおくと,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{A}}(\zeta;x)=&\zeta^2(I+A_1+A_2+A_3)\\&-\zeta\left(q^{1+\alpha_1}x_1(I+A_2+A_3)+q^{1+\alpha_2}x_2(I+A_1+A_3)\right)\\&+q^{\alpha_1+\alpha_2+2}x_1x_2(I+A_3)\qquad(3.43)\\=&\bar{W}_0^{-1}\mathrm{diag}\left(\zeta(\zeta-q^{\alpha_2+1}x_2),\ \zeta(\zeta-q^{\alpha_1+1}x_1),\ (\zeta-q^{\alpha_1+1}x_1)(\zeta-q^{\alpha_2+1}x_2)\right)\\&\times q^{D(\alpha)+I}\left(-X_1\zeta^{-1}+V_1^{(2,3)}\right)\left(-X_2\zeta^{-1}+V_2^{(3)}\right)\bar{W}_0\qquad(3.44)\end{aligned}$$

となる. この係数行列が [JS] の q 差分方程式の条件を満たすことを順に調べていく. まず ζ^2 の係数は (3.36) より

$$\tilde{\mathcal{A}}_2=I+A_1+A_2+A_3=q^{I+D(\beta)}$$

となり, これより

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{A}}_1&=q^{1+\alpha_1}x_1(A_1-q^{D(\beta)+I})+q^{1+\alpha_2}x_2(A_2-q^{D(\beta)+I}),\\\tilde{\mathcal{A}}_0&=q^{\alpha_1+\alpha_2+2}x_1x_2(I+A_3).\end{aligned}$$

と表せる.

ここでランク 2 の問題にするため $\beta_3 = -1$ とおく. これは微分のときに述べた相似条件のパラメータの平行移動で実現できるので, 一般性を失わない. このとき (3.36) より係数行列 A_i の 3 列目は 0 になるので, 左上の 2×2 ブロックの部分のみ考え, その行列を $\mathcal{A}(\zeta, x) = \mathcal{A}_2\zeta^2 + \mathcal{A}_1\zeta + \mathcal{A}_0$ とおくことにする. もちろん

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} q^{\beta_1+1} & 0 \\ 0 & q^{\beta_2+1} \end{pmatrix}$$

である. 以下,

- $\mathcal{A}_0$ の固有値は $q^{\alpha_1+\alpha_2+2}x_1x_2, q^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+3}x_1x_2$ となる.
- $\det \mathcal{A}(\zeta; x)$ の零点は $\zeta = x_1, x_2, q^{\alpha_1+1}x_1, q^{\alpha_1+1}x_1$ となる.
- 変形方程式 (3.42) の係数行列の逆行列が (3.40) のように表示される

となることを示す. いずれも明らかとまでは言えないのだが, 詳しい証明は本稿では省略する. 特に x_1 か x_2 のどちらかを定数とおき, どちらかを変形パラメータにあたる変数とすることにより q Painlevé VI が得られることがわかる. さらに方程式 (3.38) の変数 f, g と q three-wave の変数との対応は, (3.41) を書き直した

$$f = -\frac{\mathcal{A}_0^{12}}{\mathcal{A}_1^{12}}, \qquad g = \frac{(\mathcal{A}_0^{12} + x_1\mathcal{A}_1^{12})(\mathcal{A}_0^{12} + x_1q^{\alpha_1+1}\mathcal{A}_1^{12})}{q\,(\mathcal{A}_0^{11}(\mathcal{A}_1^{12})^2 - \mathcal{A}_1^{11}\mathcal{A}_0^{12}\mathcal{A}_1^{12} + q^{\beta_2+1}(\mathcal{A}_0^{12})^2)}$$

に,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0^{12} &= q^{\alpha_1+\alpha_2+2}x_1x_2\omega_{13}\bar{w}_{32} \\
\mathcal{A}_1^{12} &= q^{\alpha_1+1}x_1\omega_{11}\bar{w}_{12} + q^{\alpha_2+1}x_2\omega_{12}\bar{w}_{22} \\
\mathcal{A}_0^{11} &= q^{\alpha_1+\alpha_2+2}x_1x_2(1 + \omega_{13}\bar{w}_{31} \\
\mathcal{A}_1^{11} &= -q^{\alpha_1+1}x_1(1 + \omega_{12}\bar{w}_{21} + \omega_{13}\bar{w}_{31}) - q^{\alpha_2+1}x_2(1 + \omega_{11}\bar{w}_{11} + \omega_{13}\bar{w}_{31})
\end{aligned}$$

を代入すれば得られる.

4 おわりに

本稿の出発点となる佐藤-Wilson 方程式を n 成分系に拡張して同様の議論を行えば, 微分の場合は Garnier 系の $n \times n$ Lax 表示 [M2] に対応することもわかる. さらに n 成分 q 差分系の場合は, やはり坂井による q-Garnier 系 [Sa] の Lax 表示に対応するものと思われる.

また, 本稿に述べた q three-wave の場合に限っても, q 差分 Painlevé VI への affine Weyl 群対称性や, 幾何クリスタルとの関係, ソリトン方程式の立場による τ 関数や有理解の考察 [TM] など考えるべき問題は多い.

References

[AvdL] Aratyn, H. and van de Leur, J.: Integrable structure behind WDVV equations, *Theoret. Math. Phys.* **134** (2003), 14–26.

[Bo1] Boalch, P. P.: From Klein to Painlevé via Fourier, Laplace and Jimbo, *Proc. London Math. Soc.* **90** (2005), 167–208.

[Bo2] Boalch, P. P.: Six results on Painlevé VI, *preprint*, arXiv:math.AG/0503043, (2005).

[Du] Dubrovin, B.: Geometry of 2d topological field theories, integrable systems and quantum groups, *Springer Lecture Notes in Math.* **1620**, Springer, Berlin (1996), 120–348.

[DM] Dubrovin, B. and Mazzocco, M.: Monodromy of certain Painlevé VI transcendents and reflection groups, *Invent. Math.* **141**, (2000), 55–147.

[FY] Fokas, A. S. and Yortsos, Y. C.: The transformation properties of the sixth Painlevé equation and one-parameter families of solutions, *Lett. Nuovo Cimento* **30** (1981), 539–544.

[H] Harnad, J.: Dual isomonodromic deformations and moment maps to loop algebras, *Commun. Math. Phys.* **166** (1994), 337–365.

[JM] Jimbo, M. and Miwa, T.: Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II, *Physica* **D2** (1981), 407–448.

[JS] Jimbo, M. and Sakai, H.: A q-analog of the sixth Painlevé equation, *Lett. in Math. Phys.* **38** (1996), 145–154.

[KvdL] Kac, V. G. and van de Leur, J.: The n-component KP hierarchy and representation theory, in *Important developments in soliton theory*, Springer, Berlin (1993), 302–343.

[KNY] Kajiwara, K., Noumi, M. and Yamada, Y.: q-Painlevé systems arising from q-KP hierarchy, *Lett. in Math. Phys.* **62** (2002), 259–268.

[KK1] Kakei, S. and Kikuchi, T.: Affine Lie group approach to a derivative nonlinear Schrödinger equation and its similarity reduction, *Int. Math. Res. Not.* **78** (2004), 4181–4209.

[KK2] Kakei, S. and Kikuchi, T.: Solutions of a derivative nonlinear Schrödinger hierarchy and its similarity reduction, *Glasgow Math. J* **47**, Issue A (2005), 99–107.

[KK3] Kakei, S. and Kikuchi, T.: The sixth Painlevé equation as similarity reduction of $\widehat{\mathfrak{gl}}_3$ hierarchy, *Preprint*, arXiv:nlin.SI/0508021.

[講究] 筧三郎、菊地哲也 “一般化ドリンフェルド・ソコロフ階層の離散化と相似簡約” 数理解析研究所講究録 **1422** 「可積分系数理の展望と応用」, 192–203 (2005).

[学会] 筧三郎 “戸田階層から見たパンルベ方程式”, 日本数学会 2005 年度年会無限可積分系セッション特別講演 (2005 年 3 月, 日本大学).

[KIK] Kikuchi, T., Ikeda, T. and Kakei, S.: Similarity reduction of the modified Yajima-Oikawa equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), 11465–11480.

[Kit] Kitaev, A. V.: On similarity reductions of the three-wave resonant system to the Painlevé equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** (1990), 3543–3553.

[M1] M. Mazzocco, Painlevé sixth equation as isomonodromic deformations equation of an irregular system, In *The Kowalevski property*: CRM Proceedings and Lecture Notes **32** (2002), 219–238.

[M2] M. Mazzocco, Irregular isomonodromic deformations for Garnier systems and Okamoto's canonical transformations, *J. London Math. Soc*, **70** (2004), 405–419.

[Ok1] Okamoto, K.: Isomonodromic deformation and Painlevé equations, and the Garnier system, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. IA, Math. **33** (1986), 575–618.

[Ok2] Okamoto, K.: Studies on the Painlevé equations I. Sixth Painlevé equation $\mathrm{P_{VI}}$, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **146** (1987), 337–381.

[Sa] Sakai, H.: A q-analog of the Garnier system, *Preprint* (UTMS 2004-4).

[TM] Tsuda, T. and Masuda, T.: q-Painlevé VI equation arising from q-UC hierarchy, *Preprint* (UTMS 2004-39).

[Ta1] 高崎金久 “可積分系の世界—戸田格子とその仲間” 共立出版 (2001).

[Ta2] Takasaki, K.: q-analogue of modified KP hierarchy and its quasi-classical limit, *Lett. Math. Phys.* **72** (2005), 165–181.