RAMANUJAN グラフのゼータ関数と HASSE-WEIL 合同ゼータ関数

立教大学理学部数学科　杉山健一

有限個の頂点と辺から形成されるグラフに対して、H.Bass によりゼータ関数が定義された。この関数は、もともと伊原康隆氏により $SL_2(K)$（K は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体）に対して定義されたゼータ関数を、組み合わせ幾何学の立場から解釈されたものとなっているので、整数論との関係が深い。特に Ramanujan グラフのゼータ関数は、有限体上定義された代数曲線の Hasse-Weil 合同ゼータ関数と多くの性質を共有することが知られている。この講演では、modular 曲線 $X_0(p)$（p は素数）を素数 $l\,(\neq p)$ で還元した曲線の Hasse-Weil 合同ゼータ関数は、$X_0(p)$ の $\mathbb{F}_p$ での退化の状態を記述するデータを用いて作られる Ramanujan グラフのゼータ関数と（自明な因子を除いて）一致することを紹介する。これにより、このような曲線に対する Hasse-Weil 合同ゼータ関数は無限積表示を持ち、その臨界点における特殊値は、対応する Ramanujan グラフの幾何学的不変量を用いて表されることがわかる。これは整数論における Dedekind ゼータ関数の類数公式、あるいは双曲幾何学における Ruelle ゼータ関数の臨界点における特殊値を Milnor torsion 表す D.Fried の定理に対応する。時間が許せば、レベルが合成数の場合への拡張についても言及したい。