2017 年 7 月 16 日 実施

# 2018 年度 （夏季）

# 立教大学大学院理学研究科博士課程前期課程数学専攻入学試験問題

# （ 数 学 ）

〔注意〕＊合図があるまでこのページをめくらないこと。

1. 解答用紙が 3 枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ。
2. 配られたすべての解答用紙に受験番号を記入せよ。
3. 解答はすべて解答用紙に記入し、問題ごとに解答用紙 1 枚を使用せよ。
4. **線形代数の問題** ([1], [2]) **から 1 題、微分積分の問題** ([3], [4]) **から 1 題、専門科目の問題** ([5]∼[9]) **から 1 題の、計 3 題を選んで解答せよ。**
5. 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ。

## 線形代数

**[1]** 2 次以下の実数係数多項式のなす実線形空間を $V$ とする．0 でない実数 $a, b$ に対し，$T : V \to V$ を

$$(Tf)(x) = f(ax+b) \qquad (f \in V)$$

で定義する．

(i) $T$ は線形写像となることを示せ．

(ii) $V$ の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する $T$ の表現行列 $A$ を求めよ．

(iii) $A$ の固有多項式を求めよ．

(iv) $A$ のすべての固有空間を求めよ．

**[2]** $V$ を $n$ 次元実ベクトル空間, $W$ を $m$ 次元実ベクトル空間とする．また線形写像 $f : V \to W$, $g : W \to V$ が $\mathrm{Im}(g \circ f) = V$ を満たしているとする．

(i) $\mathrm{Ker}(g \circ f)$ を求めよ．

(ii) $\mathrm{Rank}\, f$ を求めよ．

(iii) $n \leq m$ を示せ．また $\dim \mathrm{Ker}\, g$ を求めよ．

(iv) $W = \mathrm{Ker}\, g \oplus \mathrm{Im}\, f$ を示せ．

## 微分積分

**[3]**

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, \quad x + y \geq 0\}$$

とおく.

(i) 以下の積分を求めよ.

$$\iint_D \frac{x^2}{1 + x^2 + y^2} dxdy$$

(ii) $C$ を $D$ の境界とする. このとき, 以下の積分を求めよ. ただし, 積分は反時計回りに行うものとする.

$$\int_C (x + y)dy + (x - y)dx$$

**[4]** 正数列 $\{a_n\}$ に対し, $\lim_{n\to\infty} a_n = c > 0$ であるとする.

(i) ある $A, B > 0$ が存在して, 任意の $n \geq 1$ に対して $A \leq a_n \leq B$ となることを示せ.

(ii) 実数 $s > 0$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ が収束するか発散するかを, 理由を付して述べよ.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(a_n/n)$ が収束するか発散するかを, 理由を付して述べよ.

## 専門科目

**[5]** $\mathbb{Z}$ を整数環とし,

$$R = \{x + y\sqrt{-1} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$

とおく.

(i) 複素数 $a, q$ および $b \neq 0$ に対して, 実数 $\mu, \nu, m, n$ を

$$\frac{a}{b} = \mu + \nu\sqrt{-1}, \quad q = m + n\sqrt{-1}$$

で定める. また $r = a - bq \in \mathbb{C}$ とおく. このとき, 絶対値 $|r|$, $|b|$ は, 等式

$$|r|^2 = \{(\mu - m)^2 + (\nu - n)^2\}|b|^2$$

をみたすことを示せ.

(ii) 任意の $a, b \in R$, $b \neq 0$ に対して, $|a/b - q|$ が最小となる $R$ の元（の一つ）$q$ を取り, $r = a - bq$ とおけば, 不等式 $|r| < |b|$ が成り立つことを示せ.

(iii) $R$ は単項イデアル整域であることを示せ.

(iv) $2 + \sqrt{-1}$ は $R$ の既約元であることを示せ.

(v) $R/(2 + \sqrt{-1})R$ が体となることを示せ.

**[6]** (i) $f(x) = x^4 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体 $K$ を求めよ.

(ii) ガロア群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を決定せよ.

(iii) $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ のすべての元の位数を決定せよ.

(iv) $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の位数 2 の部分群をすべて求めよ.

(v) 中間体 $K \supseteq M \supseteq \mathbb{Q}$ で $[M : \mathbb{Q}] = 4$ となるものを 2 つ求めよ.

**[7]** $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 $S$ を

$$S(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v) \qquad (0 < u,\ 0 < v < 2\pi)$$

とおき, 曲面 $T$ を

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

とおく.

(i) 曲面 $S$ の第 1 基本形式 $E$, $F$, $G$ をそれぞれ求めよ. ただし

$$E = \left(\frac{\partial S}{\partial u}, \frac{\partial S}{\partial u}\right), \quad F = \left(\frac{\partial S}{\partial u}, \frac{\partial S}{\partial v}\right), \quad G = \left(\frac{\partial S}{\partial v}, \frac{\partial S}{\partial v}\right)$$

と定め, $(\cdot, \cdot)$ は内積を表す.

(ii) 曲面 $S$ と曲面 $T$ の共通部分は曲線になる. この曲線の概形を描き, さらに長さを求めよ.

**[8]** $z, w \in \mathbb{C}$ に対して

$$d(z, w) = |z - w|$$

とおく.

(i) $d$ は $\mathbb{C}$ 上の距離関数となることを示せ. 以下 $\mathbb{C}$ にはこの距離関数による位相が入っているとする.

(ii) 正の整数 $n$ に対して,

$$Z_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; d(0, z) = \frac{1}{n} \right\}$$

とおく. このとき $\mathbb{C} \setminus \left( \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n \right)$ は $\mathbb{C}$ の開集合となることを示せ.

(iii) $\mathbb{C} \setminus \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n \right)$ は $\mathbb{C}$ の開集合とならないことを示せ.

**[9]** $i$ を虚数単位とする. $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $f(z)$ が以下の形のローラン展開を持つとする.

- $z = i$ のまわりで

$$f(z) = \frac{2i}{(z - i)^2} + \frac{2}{(z - i)} + \cdots .$$

- $z = 1 + i$ のまわりで

$$f(z) = \frac{-1}{z - 1 - i} + \cdots .$$

- $z = 1$ のまわりで

$$f(z) = -\frac{1}{2}(z - 1)^2 + \cdots .$$

さらに $f(z)$ は $|z| < 4$ の範囲ではこれら以外に零点や極を持たないとする.

(i) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-i|=1/2} f(z) dz$ を求めよ.

(ii) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-1-i/2|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ を求めよ.

(iii) $f(z)$ が $|z| \geq 4$ で有界であるとき $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)}{(z + i)^2} dz$ を求めよ.

(iv) $f(z)$ が $|z| \geq 4$ で有界であるとき $f(z)$ を求めよ.