2017 年 2 月 24 日 実施

2017 年度 （春季）
立教大学大学院理学研究科博士課程前期課程数学専攻入学試験問題
(数 学)

〔注意〕＊合図があるまでこのページをめくらないこと。

1. 解答用紙が 3 枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ。

2. 配られたすべての解答用紙に受験番号を記入せよ。

3. 解答はすべて解答用紙に記入し、問題ごとに解答用紙 1 枚を使用せよ。

4. **線形代数の問題** ([1], [2]) **から 1 題，微分積分の問題** ([3], [4]) **から 1 題，専門科目の問題** ([5]∼[9]) **から 1 題の，計 3 題を選んで解答せよ。**

5. 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ。

線形代数

[1] a, b, c を複素数とする．また行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．このとき, 以下の問に答えよ．

(i) A の行列式を求めよ．

(ii) A が正則となる a, b の必要十分条件を求めよ．

(iii) 変数 x, y, z に関する方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}$ が解を持つための必要十分条件を求めよ．

(iv) A の固有多項式を求めよ．

(v) A のジョルダン標準形を求めよ．ただし変換行列を求める必要はない．

[2] 有限次元実ベクトル空間 V と線形写像 $f : V \to V$ が $\mathrm{Ker}(f \circ f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ を満たしているとする．このとき, 以下の問に答えよ．

(i) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f \circ f)$ を示せ．

(ii) $\mathrm{Im}(f \circ f) \subset \mathrm{Im}(f)$ を示せ．

(iii) $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ を示せ．

(iv) $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = V$ を示せ．ただし $\oplus$ は直和を表す．

(v) $\mathrm{Im}(f)$ は $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ で張られ, $\mathrm{Ker}(f)$ は $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ で張られるとする．さらに f は $f \circ f = -f$ を満たしているとする．この時, V の基底 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ に関する f の表現行列を求めよ．

微分積分

[3] 正の整数 k について

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{k} x^n, \quad g_k(x) = \sum_{n=1}^{k} nx^n$$

とおく.

(i) 閉区間 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ において, 関数列 $\{f_k\}_{k=1,2,\ldots}$ は, $\dfrac{1}{1-x}$ に一様収束することを示せ.

(ii) 閉区間 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ において, 関数列 $\{g_k\}_{k=1,2,\ldots}$ は一様収束することを示せ.

(iii) 閉区間 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ における関数列 $\{g_k\}_{k=1,2,\ldots}$ の一様収束極限を x の有理式で表せ.

(iv) 開区間 $(-1, 1)$ において, 関数列 $\{f_k\}_{k=1,2,\ldots}$ は $\dfrac{1}{1-x}$ に一様収束するか, 理由を述べて答えよ.

[4] 領域 D を

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, \quad x + y \geq 1\}$$

と定める. このとき, 以下の問に答えよ.

(i) 領域 D を図示せよ.

(ii) 積分

$$\iint_D xy dxdy$$

を求めよ.

(iii) 積分

$$\iint_D x^2y^2 dxdy$$

を求めよ.

専門科目

[5] $X = \{1, 2, 3, 4\}$ とし, X 上の置換群である 4 次対称群 S_4 の部分群を考える. このとき, 以下の問に答えよ.

(i) X 上可移 (推移的) である部分群の位数は 4 で割れることを示せ.

(ii) 位数が 4 でありかつ巡回群となるような部分群は 3 個あることを示せ.

(iii) 位数が 4 であるが巡回群でないような部分群は 4 個あり, その中で正規であるものは唯一であることを示せ.

(iv) 位数が 8 である部分群を, 全ての元を列挙することで 1 つ構成せよ.

[6] $f(x) = x^5 - 2$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を K とし, G を $f(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上のガロア群とする. また, 1 の原始 5 乗根として $\zeta_5 = \cos\dfrac{2\pi}{5} + \sqrt{-1}\sin\dfrac{2\pi}{5}$ を取り, $L = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$, $M = \mathbb{Q}(\zeta_5)$, とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(i) $f(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約であることを示せ. これより, $[L : \mathbb{Q}]$ を求めよ.

(ii) ζ_5 の満たす $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ. これより, $[M : \mathbb{Q}]$ を求めよ.

(iii) $K = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \zeta_5)$ であることを示せ. さらに $[K : \mathbb{Q}]$ を求めよ.

(iv) G の元で ζ_5 を固定するもの全体を H とおく. H は G の正規部分群であることを示せ. さらに, H は次の σ で生成される巡回群であることを示せ.

$$\sigma(\zeta_5) = \zeta_5, \quad \sigma(\sqrt[5]{2}) = \zeta_5\sqrt[5]{2}$$

[7] 実数の集合 $\mathbb{R}$ を,

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x,\, y \in \mathbb{R}$$

により距離を定め距離空間とする. このとき, $\mathbb{R}$ の部分集合

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \text{ は正の整数} \right\}$$

について, 以下の問に答えよ.

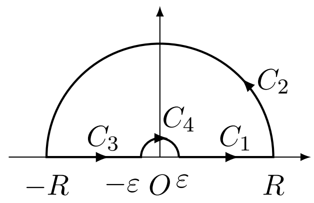
(i) A は閉集合ではないことを示せ.

(ii) A の閉包を求めよ.

(iii) 集合 $(0, 1] \setminus A$ は開集合であることを示せ.

[8] O を原点とする. $0 < \varepsilon < 1$, $R > 1$ とし,

$$C_1 : \text{線分 } z = t,\ t : \varepsilon \to R,$$
$$C_2 : \text{円弧 } z = Re^{it},\ t : 0 \to \pi,$$
$$C_3 : \text{線分 } z = -t,\ t : R \to \varepsilon,$$
$$C_4 : \text{円弧 } z = \varepsilon e^{it},\ t : \pi \to 0$$



をこの順でつなげた閉曲線を C で表す. 以下 $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{iy \in \mathbb{C} \mid y \leq 0\}$ $(r > 0,\ -\pi/2 < \theta < 3\pi/2)$ に対して $\operatorname{Log} z = \log r + i\theta$ とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(i) $1 + z^2 + z^4 = 0$ となる $z \in \mathbb{C}$ を全て求め, 極形式で表せ.

(ii) 関数 $\dfrac{(\operatorname{Log} z)^2}{1 + z^2 + z^4}$ の上半平面にある全ての極での留数を求めよ.

(iii) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \dfrac{(\operatorname{Log} z)^2}{1 + z^2 + z^4}dz$ を求めよ.

(iv) $\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\log x}{1 + x^2 + x^4}dx$ を求めよ.

[9] k を 4 以上の自然数とする. k 個の頂点 $\{P_1, P_2, P_3, \cdots, P_k\}$ のうち, 互いに相異なる頂点をすべて辺で結んで作られる単体複体を X_k とし, その実数係数の n 次ホモロジー群を $H_n(X_k)$ で表す. このとき, 以下の問に答えよ.

(i) X_4 のオイラー数を求めよ.

(ii) $H_0(X_4)$, $H_1(X_4)$ の次元をそれぞれ求めよ.

(iii) 4 以上の自然数 k について, X_k のオイラー数を k を用いて表せ.

(iv) 4 以上の自然数 k について, $H_0(X_k)$, $H_1(X_k)$ の次元をそれぞれ k を用いて表せ.