2016 年 7 月 17 日 実施

2017 年度 (夏季)
立教大学大学院理学研究科数学専攻博士課程前期課程
入学試験問題 (数学)

[注意]

- 配られたすべての解答用紙に受験番号を記入せよ.
- **線形代数の問題** ([1], [2]) **から 1 題，微分積分の問題** ([3], [4]) **から 1 題，専門科目の問題** ([5]~[9]) **の中から 1 題の，計 3 題を選んで解答せよ.**
- 解答はすべて解答用紙に記入し，問題ごとに解答用紙 1 枚を使用せよ.
- 解答用紙が 3 枚配られていることを確認せよ．そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ.
- 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ.

線形代数

[1] A を 4 次複素正方行列で, $A^2 = -I_4$ を満たすとする. ここで, I_4 は 4 次単位行列である. また, C を 4 次複素正方行列で, $AC = CA$ を満たすとする.

(i) v を零ベクトルでない任意の $\mathbb{C}^4$ のベクトルとする時, $v + \sqrt{-1}Av$ と $v - \sqrt{-1}Av$ の少なくとも一方は A の固有ベクトルであることを示せ.

(ii) A は対角化可能であることを示せ.

(iii) $\mathrm{tr}A$ のとりうる値を全て挙げよ.

(iv) B は 2 次複素正方行列で, ある自然数 k について $B^k = O_2$ を満たすとする. ここで O_2 は 2 次の零行列である. この時, $B^2 = O_2$ であることを示せ.

(v) $\mathrm{tr}A = 0$ であるとする. また, ある自然数 k について $C^k = O_4$ が成り立つとする. ここで O_4 は 4 次の零行列である. この時, $C^2 = O_4$ であることを示せ.

[2] $e_1, e_2, e_3, e_4, f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbb{R}^4$ を

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とし, W_1, W_2 を, それぞれ $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ により生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間とする. 以下の問に答えよ.

(i)

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; ax + by + cz + dw = 0 \right\},$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; px + qy + rz + sw = 0 \right\},$$

を満たす $a, b, c, d, p, q, r, s \in \mathbb{R}$ を一組求めよ.

(ii) $W_1 \cap W_2$ の基底を一組求めよ.

(iii) 任意の $v \in \mathbb{R}^4$ に対し, $v = ge_1 + hf_1 + w$ を満す $g, h \in \mathbb{R}$ および $w \in W_1 \cap W_2$ が一意的に存在することを示せ.

微分積分

[3] 本問において，次の定理 1, 2 は証明せずに用いてよいものとする．

【定理 1】 I を $\mathbb{R}$ における区間とし，ψ は $I\times[a,b]$ において C^1 級の関数とするとき，I 上で定義された関数 $F(x)=\displaystyle\int_a^b \psi(x,t)dt$ は I において微分可能であり，次が成り立つ：

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\int_a^b \psi(x,t)dt=\int_a^b \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t)dt.$$

【定理 2】 ψ は $\mathbb{R}\times[a,b]$ で定義された連続関数とする．極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\psi(x,t)$ が $t\in[a,b]$ で一様収束するならば，次が成り立つ：

$$\lim_{x\to\infty}\int_a^b \psi(x,t)dt=\int_a^b\left\{\lim_{x\to\infty}\psi(x,t)\right\}dt.$$

$\mathbb{R}$ 上で定義された関数 f, g, h を次のように定義する：

$$f(x)=\int_0^x \exp(-t^2)dt,\quad g(x)=\{f(x)\}^2,\quad h(x)=\int_0^1\frac{\exp(-x^2(t^2+1))}{t^2+1}dt.$$

(i) $\dfrac{dg(x)}{dx}$ を $f(x)$ を用いて表せ．

(ii) 任意の実数 x に対して $\dfrac{dh(x)}{dx}=-\dfrac{dg(x)}{dx}$ であることを示せ．

(iii) 任意の実数 x に対して $g(x)+h(x)=\dfrac{\pi}{4}$ であることを示せ．

(iv) (iii) の結果を用いて $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-t^2)dt$ の値を求めよ．

[4] $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ を正の実数からなる数列とする．定数 $c>0$ に対し $b_n=\dfrac{a_n}{a_n+c}$ とする．以下の問に答えよ．

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$ が収束するならば $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty b_n$ も収束することを示せ．

(ii) $\{a_n\}$ が有界のとき，ある $K>0$ が存在して $Ka_n<b_n$ $(n=1,2,\ldots)$ が成り立つことを示せ．

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$ が発散するならば $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty b_n$ も発散することを示せ．

専門科目

[5] $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^n$ のユークリッド距離とし, r を正の実数とする．このとき次の問に答えよ．

(i) V を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．この時, 集合

$$V(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,v) \leq r,\ \ \exists v \in V\}$$

は開集合であることを示せ．

(ii) K を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合とする．この時, 集合

$$K(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,y) \leq r,\ \ \exists y \in K\}$$

はコンパクト集合であることを示せ．

[6] 可換環 R は UFD とする．R のイデアル I, J に対し, I, J の積 IJ を $\{fg \mid f \in I, g \in J\}$ で生成される R のイデアルと定義する．以下の問に答えよ．

(i) $IJ = R$ ならば $I = R$ かつ $J = R$ であることを示せ．

(ii) p を R の素元とする．$IJ = \langle p \rangle = \{ap \mid a \in R\}$ ならば $I = \langle p \rangle$ かつ $J = R$, または $I = R$ かつ $J = \langle p \rangle$ であることを示せ．

(iii) p を R の素元とする．$IJ = \langle p^2 \rangle = \{ap^2 \mid a \in R\}$ かつ $I \neq R$, $J \neq R$ ならば $I = J = \langle p \rangle$ であることを示せ．

[7] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$, $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ とする．

(i) $[K : \mathbb{Q}]$ および, K の $\mathbb{Q}$-線形空間としての基底を一組求めよ．

(ii) $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ を, (i) で求めた基底の $\mathbb{Q}$-線形結合でそれぞれ表せ．

(iii) α の, $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $f(x)$ を求めよ．

(iv) $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ であることを示せ．

(v) $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ を α の $\mathbb{Q}$ 係数の多項式として表せ．

[8] $f(z)$ を，複素平面上の単位円板 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ で定義された連続関数とする．r を $0 < r < 1$ を満たす定数，α を $0 < \alpha < 2\pi$ を満たす定数とし，D 内の円弧 $C(r, \alpha)$ を

$$C(r,\alpha) = \left\{ re^{i\theta} \,\middle|\, 0 \leq \theta \leq \alpha \right\}$$

で定める．ただし $i = \sqrt{-1}$ (虚数単位) であり，$C(r, \alpha)$ の向きは反時計回り (θ の増加する方向) とする．

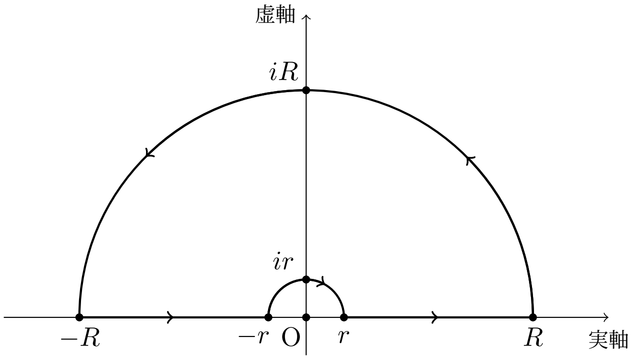
(i) 極限 $\displaystyle\lim_{r\to+0}\int_{C(r,\alpha)}\frac{f(z)-f(0)}{z}dz=0$ を証明せよ．

(ii) 極限 $\displaystyle\lim_{r\to+0}\int_{C(r,\alpha)}\frac{f(z)}{z}dz$ の値を求めよ．

以下では $g(z)=\dfrac{z-5}{z^3-4z^2+5z}$ とする．

(iii) $g(z)$ のすべての極と，それぞれの極における留数を求めよ．

(iv) $0<r<1,\ 3<R$ に対して，閉路 $\widetilde{C}$ を下図で定める．このとき，線積分 $\displaystyle\int_{\widetilde{C}}g(z)dz$ の値を求めよ．ただし積分路 $\widetilde{C}$ の向きは反時計回りとする．



(v) 実積分の極限 $\displaystyle\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to+0}}\left\{\int_{-R}^{-r}g(x)dx+\int_{r}^{R}g(x)dx\right\}$ が収束することを示せ．また，極限値を求めよ．

[9] 曲面 S を，

$$S(u,v)=\left(\frac{\cos v}{\cosh u},\frac{\sin v}{\cosh u},\frac{\sinh u}{\cosh u}\right),\quad u,v\in\mathbb{R}$$

で定義する．

(i) 点 $S(u,v)$ における S の第一基本量を求めよ．

(ii) 点 $S(u,v)$ における S の単位法線ベクトルを求めよ．

(iii) 点 $S(u,v)$ における S の第二基本量を求めよ．

(iv) 点 $S(u,v)$ における S のガウス曲率を求めよ．

以　上