2016 年 2 月 26 日 実施

2016 年度 春季
理学研究科博士課程 前期課程 数学専攻 入学試験問題
(数 学)

[注意]

- 配られたすべての解答用紙に受験番号を記入せよ.
- **線形代数の問題** ([1], [2]) **から 1 題，微分積分の問題** ([3], [4]) **から 1 題，専門科目の問題** ([5]～[9]) **の中から 1 題の，計 3 題を選んで解答せよ.**
- 解答はすべて解答用紙に記入し，問題ごとに解答用紙 1 枚を使用せよ.
- 解答用紙が 3 枚配られていることを確認せよ．そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ.
- 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ.

線形代数

[1] V を n 次元実ベクトル空間，$f : V \longrightarrow V$ を線形変換とする．合成変換 f^i を $f^i = f \circ f^{i-1}$ $(i \geq 2)$，$f^i = f$ $(i = 1)$ で定め，$W_i = \mathrm{Ker}\ f^i, V_i = \mathrm{Im}\ f^i$ とおく．

(i) ある k が存在して，$W_k = W_{k+1} = W_{k+2}$ となることを示せ.

(ii) (i) の k に対して，$V_k = V_{k+1} = V_{k+2}$ となることを示せ.

(iii) (i) の k に対して

$$V = V_k \oplus W_k \text{ (直和)}$$

となることを示せ.

[2] 実数 α, β について，行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^3 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha^3 \\ \beta^3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく.

(i) $\alpha\beta \neq 0$ のとき，A の固有値とジョルダン標準形を求めよ.

(ii) $\alpha\beta = 0$ のとき，A のジョルダン標準形を求めよ.

微分積分

[3] α を実数，$\{a_n\}$ を実数列とする．

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\alpha$ であることを示せ．

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\infty$ であることを示せ．

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=\alpha$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ を求めよ．

(iv) 任意の n に対して $a_n>0$ とし，$\alpha>0$ とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ を求めよ．

[4] $I=[a,b]$ で連続な関数列 $\{f_n(x)\}$ が I 上で $f(x)$ に一様収束するとき，$f(x)$ は I 上連続である．

(i) $I=[a,b]$ で連続な関数列 $\{f_n(x)\}$ が I 上で $f(x)$ に一様収束するとき，

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx \quad (n\to\infty)$$

が成り立つことを示せ．

(ii) 関数列 $\{f_n(x)\}$, $f_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k$ は, 任意の $R\in(0,1)$ に対し $[-R,R]$ 上で, ある関数 $f(x)$ に一様収束することを示せ．

(iii) 開区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上の関数 $x=\tan t$ の逆関数を $t=\tan^{-1}x$ と書く．

$$\tan^{-1}x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\quad(|x|<1)$$

が成り立つことを示せ．

専門科目

[5] ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $U = \{(x,0) \mid x \neq 0\}$ と $X = \{(x,y) \mid xy = 1\}$ について，以下の問に答えよ．

(i) X は閉集合であることを示せ．

(ii) U は閉集合であるか，理由を述べて答えよ．

(iii) 写像

$$f : U \to X, \quad f((x,0)) = (x, \frac{1}{x})$$

はすべてのコーシー列をコーシー列に写すか，理由を述べて答えよ．

[6] S_4 を集合 $\{1,2,3,4\}$ 上の 4 次対称群とし，その単位元を e で表す．

$$V = \{e, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\} \subset S_4$$

とし, 集合 $\{1,2,3\}$ 上の 3 次対称群 S_3 を $S_3 \subset S_4$ とみなす．このとき, 以下の問に答えよ．

(i) V は S_4 の部分群であることを示せ．

(ii) V は S_4 の正規部分群であることを示せ．

(iii) 剰余群 S_4/V の完全代表系として S_3 がとれることを示せ．

[7] $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ とする．

(i) $f(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約であることを示せ．

(ii) α を $f(x)$ の任意の根とするとき $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ は $f(x)$ の最小分解体であることを示せ．

(iii) $f(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上のガロア群を求めよ．

(iv) K の $\mathbb{Q}$ 上 2 次の部分体を全て求めよ．

[8] p, q は整数で $0 < q < p$ をみたすものとする．複素数 z に対して複素関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{z^{q-1}}{1 + z^p}$$

で定める．

(i) $f(z)$ の極をすべて求めよ．

(ii) R を 1 より大きい実数とする．

$$C_1 = \{x \mid 0 \leq x \leq R\}, \quad C_2 = \{Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{p}\}, \quad C_3 = \{te^{i\frac{2\pi}{p}} \mid 0 \leq t \leq R\}$$

とおき，C_1 を 0 から R までたどり，続けて，C_2 を R から $Re^{i\frac{2\pi}{p}}$ までたどり，さらに続けて，C_3 を $Re^{i\frac{2\pi}{p}}$ から 0 までたどる複素平面上の経路を C とする．
$\displaystyle\int_C f(z)dz$ を求めよ．

(iii) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1 + x^p} dx$ の値を求めよ．

[9] 以下の問に答えよ．

(i) 閉区間 $I = [0, 1]$ の整数係数の 1 次元ホモロジー群を求めよ．

(ii) $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ の整数係数の 1 次元ホモロジー群を求めよ．

(iii) I と S^1 はホモトピー同値でないことを示せ．

以　上