2015 年 7 月 19 日 実施

2016 年度 夏季

理学研究科博士課程 前期課程 数学専攻 入学試験問題

(数 学)

[注意]

- 配られたすべての解答用紙に受験番号を記入せよ．
- **線形代数の問題 ([1], [2]) から 1 題，微分積分の問題 ([3], [4]) から 1 題，専門科目の問題 ([5]〜[9]) の中から 1 題の，計 3 題を選んで解答せよ．**
- 解答はすべて解答用紙に記入し，問題ごとに解答用紙 1 枚を使用せよ．
- 解答用紙が 3 枚配られていることを確認せよ．そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ．
- 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ．

線形代数

[1] a を実数とするとき, 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ.

(i) A の階数 $\operatorname{rank} A$ を求めよ.

(ii) $\operatorname{rank} A < 3$ のとき, A の Jordan 標準形 J と $P^{-1}AP = J$ をみたす正則行列 P を求めよ.

[2] 2 次以下の実数係数多項式のなす実線形空間を V とする. 実数 a に対して $\phi_a : V \to \mathbb{R}^3$ を

$$\phi_a(f) = \begin{pmatrix} (a-2)f'(2) \\ af(3) \\ f(a+1) \end{pmatrix} \qquad (f \in V)$$

で定義する. ただし f' は多項式 f の導関数を表す.

(i) ϕ_a は線型写像となることを示せ.

(ii) V の基底 $\{x^2, x, 1\}$, および $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に関する ϕ_a の表現行列 A_a を求めよ.

(iii) ϕ_a が同型写像とならない a をすべて求めよ.

(iv) ϕ_a が同型写像とならない各 a に対して, 像 $\operatorname{Im} \phi_a$ および核 $\operatorname{Ker} \phi_a$ の基底をそれぞれ 1 組ずつ求めよ.

微分積分

[3] I を開区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする.

(i) I 上の関数 $\tan x$ の逆関数を $\arctan t$ と書く. このとき,

$$\frac{d \arctan t}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$$

を示せ.

(ii) 不定積分

$$\int \frac{1}{e^{-x}+e^{x}} dx$$

を求めよ.

(iii) 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^{-x}+e^{x}} dx$$

の値を求めよ.

[4] $s > 0$ として, 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を以下のように定義する.

$$f(x) = \begin{cases} |x|^s \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

(i) $\mathbb{R}$ 上の関数 $g(x)$ が $x = 0$ で微分可能であることの定義を述べよ.

(ii) $f(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ.

(iii) $f(x)$ が $x = 0$ で微分可能となる s の範囲を求めよ.

(iv) s が (iii) で求めた範囲にあるとき, 実数全体で $f(x)$ の導関数が連続となる s の範囲を求めよ.

専門科目

[5] 次の関数 $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^2$ 上の距離となるかどうか判定し, それを証明せよ. ただし $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ とおく.

(i) $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

(ii) $d(x, y) = \begin{cases} 0 & (x = y), \\ 1 & (x \neq y). \end{cases}$

(iii) $d(x, y) = |x_1 - y_2| + |x_2 - y_1|$.

[6] 自然数 m に対し, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ は整数全体のなす無限巡回群 $\mathbb{Z}$ の m の倍数全体のなす部分群 $m\mathbb{Z}$ による剰余群を表す. また, 整数 a に対して $m\mathbb{Z}$ による a の剰余類を $[a]_m$ で表すことにする.

(i) m, n を互いに素な自然数とするとき, 直積群 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元 $([1]_m, [1]_n)$ の位数を求めよ.

(ii) m, n が互いに素な自然数でなければ $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は巡回群でないことを示せ.

(iii) 素数 p に対し, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の部分群の中で位数 p のものは全部で何個あるか.

[7] $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$ とする. $\mathbb{Q}$ を有理数体とし, $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ とおく.

(i) $\alpha \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ であることを示せ. ただし, $\sqrt{5}$ が無理数であることを用いてよい.

(ii) α の $\mathbb{Q}$ 上の共役をすべて求めよ.

(iii) K を含む $\mathbb{Q}$ 上のガロア拡大の中で最小のものを L とするとき, 拡大次数 $[L : \mathbb{Q}]$ 求めよ.

[8] 実数 a に対して, 複素関数 $f(z)$ を $f(z) = \dfrac{e^{az}}{(z-1)^2(z+3)}$ によって定義する.

(i) $f(z)$ のそれぞれの極における位数と留数をすべて求めよ.

(ii) x を実数とする. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ を求めよ.

(iii) $\displaystyle\int_{-i\infty}^{i\infty} f(z)dz$ を求めよ. ただし積分路は虚軸を下から上へ向かう直線という意味である.

[9] パラメータ u, v によって

$$S(u,v) = \left(\frac{u-v}{u+v}, \frac{uv+1}{u+v}, \frac{uv-1}{u+v}\right)$$

でパラメータづけられる曲面 S を考える. 但し, u, v は $u+v \neq 0$ となる範囲を動く実数とする.

(i) u を 0 に固定して得られる図形 $S(0,v)$ はある直線に含まれることを示せ.

(ii) u を 2 に固定して得られる図形 $S(2,v)$ はある直線に含まれることを示せ.

(iii) (i) および (ii) で得られた直線をそれぞれ l_0, l_2 と書く. $l_0 \cap l_2 = \emptyset$ であることを示せ.

(iv) $v=0$ と固定してして得られる図形 $S(u,0)$ を m とする. このとき, 共通部分 $l_0 \cap m$, $l_2 \cap m$ をそれぞれ求めよ.