2015 年 2 月 27 日 実施

2015 年度 春季

理学研究科博士課程 前期課程 数学専攻 入学試験問題

(数 学)

［注意］

- 配られたすべての解答用紙に受験番号を記入せよ．
- **線形代数の問題 ([1], [2]) から 1 題，微分積分の問題 ([3], [4]) から 1 題，専門科目の問題 ([5]∼[9]) の中から 1 題の，計 3 題を選んで解答せよ．**
- 解答はすべて解答用紙に記入し，問題ごとに解答用紙 1 枚を使用せよ．
- 解答用紙が 3 枚配られていることを確認せよ．そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ．
- 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ．

線形代数

[1] $M_2(\mathbb{R})$ を 2 次の実正方行列全体の集合とする．$M_2(\mathbb{R})$ は行列の加法と実数のスカラー倍により，実ベクトル空間となる．$M_2(\mathbb{R})$ の基底 $\mathcal{B}$ として，

$$\mathcal{B} = \left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

がとれる．

(i) $\boldsymbol{V} = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid {}^tX = X\}$ とする．ここで ${}^tX$ は X の転置行列を表す．$\boldsymbol{V}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ．さらに $\boldsymbol{V}$ の基底をひと組求めよ．

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とし，$M_2(\mathbb{R})$ から $M_2(\mathbb{R})$ への写像 ϕ_A を以下で定義する．

$$\phi_A : M_2(\mathbb{R}) \ni X \mapsto AX + {}^tX\,{}^tA \in M_2(\mathbb{R})$$

このとき ϕ_A は線形変換であることを示せ．

(iii) (ii) で定めた線形変換 ϕ_A の $M_2(\mathbb{R})$ の基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列を求めよ．

(iv) (ii) で定めた線形変換 ϕ_A の像は (i) で定めた $\boldsymbol{V}$ に一致することを示せ．

[2] 複素数列 $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ で，以下の条件を満たすものを考える．

$$x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

このとき，行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ を考えると，$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$ となる．

(i) A の固有多項式を求めよ．さらに異なる固有値をすべて求めよ．

(ii) A のジョルダン標準形 J と $J = P^{-1}AP$ となる変換行列 P を求めよ．

(iii) 一般の自然数 m に対して J^m を求めよ．

(iv) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ のときの一般項 x_n を求めよ．

微分積分

[3] 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について次の問に答えよ.

(i) もし $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するなら, $a_n \to 0 \ \ (n \to \infty)$ であることを示せ.

(ii) 各項 a_n が正の実数である級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ も収束することを示せ.

(iii) $a_1 = 1, a_2 = a_3 = \dfrac{1}{2}$, $a_4 = \cdots = a_7 = \dfrac{1}{4}$, 一般項が

$$a_{2^k} = \cdots = a_{2^{k+1}-1} = \frac{1}{2^k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

で与えられる数列を考える. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するか否か, 理由を付して答えよ.

(iv) (iii) の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の各項を 2 乗して得られる数列

$$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \ \ b_n = a_n^2$$

について, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束するか否か, 理由を付して答えよ.

[4] 次の広義積分が収束するかどうか, 証明を付して答えよ.

(i) $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-xy} dxdy$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$

専門科目

[5] X を位相空間とし, 積空間 $X \times X$ の部分集合 Δ を

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

と定める. このとき以下の問に答えよ.

(i) X がハウスドルフ空間であることの定義を述べよ.

(ii) X がハウスドルフ空間であるとき, Δ は閉集合であることを示せ.

(iii) 逆に, 部分集合 Δ が閉集合であるとき, X はハウスドルフ空間であることを示せ.

[6] 集合 G, H を以下のように定義する.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R}, a^2 - b^2 \neq 0 \right\}, \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

このとき, G は行列の積に関して群となり, また, $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ は乗法に関して群となる. $G, \mathbb{R}^\times$ はともに可換群である. 以上を認めた上で, 以下の問に答えよ.

(i) H は群 G の部分群となることを示せ. さらに, H は G の正規部分群であることを示せ.

(ii) 群 G から 群 $\mathbb{R}^\times$ への写像 ϕ を以下のように定義する.

$$\phi : G \ni \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + b \in \mathbb{R}^\times$$

ϕ は群 G から乗法群 $\mathbb{R}^\times$ への準同型写像であることを示せ.

(iii) (ii) で定めた準同型写像 ϕ の核を K とする. K を具体的に求めよ. さらに, $H \cap K = \{E\}$, ここで E は 2 次単位行列, となることを示せ.

(iv) (iii) で定めた K に対して $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ とする. このとき, $G = HK$ であること, すなわち G の各元 g は $g = hk$, $h \in H, k \in K$ と表されることを示せ.

[7] $f(x) = x^6 - 3$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を K とし, G を $f(x)$ のガロア群とする. また, 1 の原始 6 乗根として $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{6}} = \dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}$ を取る. このとき, 以下の問に答えよ.

(i) $f(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約であることを示せ. さらに, ζ の満たす $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は $x^2 - x + 1$ であることを示せ.

(ii) $f(x)$ の根を $\sqrt[6]{3}$ と ζ を用いてすべて表せ. さらに, $K = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}, \zeta)$ であることを示せ.

(iii) $L = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3})$ とする. このとき, K の L 上の拡大次数 $[K : L]$ は 2 であり, K の $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数 $[K : \mathbb{Q}]$ は 12 であることを示せ.

(iv) G の元で ζ を固定するもの全体を H とおく. $\mathbb{Q}(\zeta)$ 上 $f(x)$ は既約であることを示し, これを用いて H は次の σ で生成される巡回群であることを示せ.

$$\sigma(\zeta) = \zeta, \quad \sigma(\sqrt[6]{3}) = \zeta\sqrt[6]{3}$$

[8] 複素関数 $f(z) = \dfrac{e^z + 1}{e^z - 1}$ について以下の問に答えよ.

(i) 等式 $f(z+T) = f(z)$ が任意の $z \in \mathbb{C}$ について成り立つような定数 $T \in \mathbb{C}$ をすべて求めよ.

(ii) $f(z)$ の極をすべて求めよ.

(iii) 4 点 $a \pm \pi i$, $b \pm \pi i$ $(a > b > 0)$ を頂点とする長方形の周を正の向きに一周する積分路を C とする. 積分 $\displaystyle\int_C f(z)dz$ を求めよ.

(iv) $a > 0$ に対し, $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(a+iy)dy$ と定める. I の値は a の取り方によらないことを示せ.

(v) I の値を求めよ.

[9] (i) $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ を $x(t) = \displaystyle\int_0^t \sqrt{1-e^{-2\tau}}d\tau$, $y(t) = e^{-t}$ $(t > 0)$ で定義される平面曲線とする. このとき t は弧長によるパラメータであることを示せ.

(ii) (i) で与えた曲線の $\gamma(t)$ での接線が x 軸と交わる点を $p(t)$ とすると, 線分 $\overline{\gamma(t)p(t)}$ の長さは常に 1 であることを示せ.

(iii) (i) で与えた曲線を x 軸のまわりに回転させることにより, 曲面

$$S(t,\theta) = \left(\int_0^t \sqrt{1-e^{-2\tau}}d\tau, e^{-t}\cos\theta, e^{-t}\sin\theta\right), \ \ t > 0, \ 0 \le \theta < 2\pi$$

が定まる.

(a) S の第一基本量 E, F, G を求めよ.

(b) S の第二基本量 L, M, N を求めよ.

(c) S のガウス曲率を求めよ.