2012 年 7 月 15 日

# 2013 年度
# 理学研究科博士課程　前期課程　数学専攻　入学試験問題
# (数学)

**次の問題 [1]〜[4] の中から 2 題，[5]〜[9] の中から 1 題を選んで解答せよ．**
**解答はすべて解答用紙に記入し，問題ごとに解答用紙 1 枚を使用すること．**

**[1]** ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4$ および $4 \times 4$ 行列 $A, B$ を次のように定める．

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}} \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A = I_4 - \boldsymbol{u}\,{}^t\boldsymbol{u}, \quad B = \boldsymbol{v}\,{}^t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\,{}^t\boldsymbol{w}.$$

ここで $a, b \in \mathbb{R}$ である．また $I_4$ は 4 次単位行列であり，${}^t\boldsymbol{u}$, ${}^t\boldsymbol{v}$, ${}^t\boldsymbol{w}$ はそれぞれ $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ の転置行列である．
以下では行列 $A$, $B$ の定める線形写像を $T_A$, $T_B$ で表すことにする．

(i) $\operatorname{Ker} T_A$ を求めよ．
(ii) $\operatorname{Im} T_A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0\}$ を示せ．ただし $(\ ,\ )$ は $\mathbb{R}^4$ の標準的な内積である．
(iii) $A$, $B$ の階数 (rank) を求めよ．
(iv) $\operatorname{Im} T_A + \operatorname{Im} T_B \neq \mathbb{R}^4$ であるとき $a, b$ を求めよ．

**[2]** 複素 $n$ 次正方行列 $A$ が非負であるとは，$\mathbb{C}^n$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ となるときをいう．ただし $(\ ,\ )$ は $\mathbb{C}^n$ の標準的な内積である．

(i) 非負行列の固有値は非負の実数であることを示せ．
(ii) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ は非負行列であることを示せ．
(iii) (ii) の行列 $A$ は 2 つの固有値 $\alpha_1, \alpha_2 (\alpha_1 < \alpha_2)$ を持つ．このとき，

$$\begin{cases} P_i P_i = P_i & (i = 1, 2) \\ P_1 P_2 = P_2 P_1 = O_3 & \\ P_1 + P_2 = I_3 & \\ P_i^* = P_i & (i = 1, 2) \end{cases}$$

をみたす 3 次正方行列 $P_1, P_2$ を用いて，

$$A = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$$

と表すことができることを示せ．ただし，$O_3$ は 3 次の零行列，$I_3$ は 3 次の単位行列であり，$P_i^*$ は $P_i$ の随伴行列である．

**[3]** 0 以上の整数 $n$ に対して $\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$ となる多項式を $T_n(x)$ とする.

(i) $T_{n+1}(x)$ を $T_n(x)$, $T_{n-1}(x)$ および $x$ で表せ.

(ii) $T_n(x)$ の最高次の項，および定数項を求めよ.

(iii) 次の積分を計算せよ.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x) T_n(x) dx$$

(iv) $T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x)$ を示し $T_8(x)$ を求めよ.

**[4]** $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = \frac{xy}{(2+x^2+y^2)^2}$$

について，以下の問に答えよ.

(i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ をみたす点 $(x,y)$ をすべて求めよ.

(ii) (i) で求めた点のそれぞれにおいて $f(x,y)$ が極大または極小となるかどうか判定せよ.

(iii) 領域 $D$ を $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$ とする. $D$ 上で $f(x,y)$ の最大値, 最小値が存在することを示し, それらを求めよ.

**[5]** 群 $G$ は $\sigma, \tau$ で生成され，関係式 $\sigma^4 = e$, $\tau^2 = e$, $\sigma\tau = \tau\sigma^{-1}$ を満たす位数 8 の群とする．ただし，$e$ は単位元を表すものとする．

(i) $G$ の元をすべて書け．

(ii) $G$ において $\sigma^2$ で生成される部分群を $H$ と表す．$H$ は $G$ の指数 4 の正規部分群であることを示せ．

(iii) $G$ において $xyx^{-1}y^{-1}$ の形の元で生成される部分群を $C$ と表す．$C$ は $G$ の正規部分群であることを示せ．

(iv) $C$ を (iii) で決めた部分群とする．剰余群 $G/C$ の各元の位数を求めよ．

**[6]** $\zeta = \exp\left(\dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{7}\right)$,　$\omega = \exp\left(\dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{3}\right)$ とし，

$\alpha = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$,　$\beta = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6$,

$u = \zeta + \omega\zeta^2 + \omega^2\zeta^4$,　$v = \zeta + \omega^2\zeta^2 + \omega\zeta^4$ とする．

(i) $\alpha$ の有理数体上の最小多項式を求め，$\alpha$ を有理数の平方根を用いて表せ．

(ii) $uv$ を有理数の平方根を用いて表せ．

(iii) $\zeta$ を $\alpha$ と $u$ の有理数係数の有理式で表せ．

(iv) $u^3$ を有理数の平方根を用いて表せ．

**[7]** 実数 $a$ は $0 < a < 1$ をみたすものとする．

(i) 関数 $f(z) = \dfrac{e^{az}}{e^z + 1}$ の複素平面上の極, およびそこでの留数をすべて求めよ．

(ii) $R$ を正数とし，4 点 $-R$, $R$, $R + 2\pi i$, $-R + 2\pi i$ を頂点とする長方形に沿う $f(z)$ の積分を考えることにより，積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{e^x + 1}\, dx$$

の値を求めよ．

**[8]**

3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 $S$ を次のパラメータ表示で定める.

$$(x,\,y,\,z) = ((R + r\cos u)\cos v,\,(R + r\cos u)\sin v,\,r\sin u), \quad u, v \in [0, 2\pi).$$

ただし実数 $R, r$ は $R > r > 0$ をみたすものとする.

(i) 曲面 $S$ はユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ のコンパクトな部分集合であることを示せ.

(ii) 曲面 $S$ はユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の弧状連結な部分集合であることを示せ.

**[9]** 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 $S$ を次のパラメータ表示で定める.

$$(x,\,y,\,z) = (u\cos v,\,u\sin v,\,f(v)), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

ただし $f(v)$ は $v$ の $C^\infty$ 級関数とする.

(i) 曲面 $S$ の第 1 基本形式と第 2 基本形式を求めよ.

(ii) 曲面 $S$ のガウス曲率 $K$ と平均曲率 $H$ を求めよ.

(iii) 曲面 $S$ の平均曲率 $H$ が恒等的に 0 であるとき $f(v)$ を求めよ.